253 Utilisation de la notion de convexité en analyse

I Fonctions convexes, ensembles convexes

1) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Soit C une partie d'un espace affine $\mathcal{A}$, C est dit convexe si $\forall x, y \in C, [x,y] \subset S$

Exemple 2 : Dans un espace vectoriel normé $B(0,1)$ est convexe.

Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème/Définition 3 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

(ii) $\forall (x,y,z) \in I^3, (x<y<z)$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

(iii) $\forall a \in I, t \mapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est $\nearrow$ sur $I \setminus \{a\}$

(iv) L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I, f(x) \leq y\}$ (épigraphe de f) est un convexe de $\mathbb{R}^2$

Une fonction qui vérifie l'une de ces assertions est dite convexe (strictement convexe en remplaçant $\leq$ par $<$ et $[0,1]$ par $]0,1[$)

Exemple 4 : $x \mapsto e^x$ est convexe.

Rmq 5 : Une fonction est dite concave si $-f$ est convexe. $x \mapsto \log(x)$ est concave.

2) Régularité

Théorème 6 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. La fonction f est lipschitzienne sur chaque intervalle $[a,b] \subset \mathring{I}$ et donc continue sur $\mathring{I}$.

Théorème 7 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (resp strictement convexe) alors $f'_-(x)$ et $f'_+(x)$ existent et sont croissantes (resp strictement croissantes) sur $\mathring{I}$

Théorème 8 : Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. L'ensemble E où f n'est pas dérivable est dénombrable et f est continue sur $I \setminus E$.

3) Premières caractérisations en dimension 1.

Théorème 9 : $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est convexe (resp strict) si et seulement si il existe $g :]a;b[\to \mathbb{R}$ croissante (resp strict) et $c \in]a;b[$ tel que $\forall x \in]a;b[, f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt$

Corollaire 10 : Si f est différentiable sur $]a;b[$ alors f est convexe (resp strict) ssi f' est croissante (resp strict).

Si de plus f'' existe alors f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$ (strictement convexe si $f''(x) > 0$) $\forall x \in]a;b[$

4) Inégalités de convexité :

Théorème 11 : (Jensen) Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) = 1$ et g une fonction intégrable à valeur dans $]a;b[$. On a :

$$\boxed{f\left(\int_\Omega g\,d\mu\right) \leq \int_\Omega f\circ g\,d\mu}$$

Application 12 (Inégalité arithmético-géométrique) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\boxed{(a_1 \dots a_n)^{1/n} \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)}$$

Théorème 13 (Inégalité de Young) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Théorème 14 (Inégalité de Holder) $p, q \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\boxed{\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}}$$

Théorème 15 (Inégalité de Minkowski) $p \geq 1$

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}}$$

Remarque 16 : Ces inégalités se généralisent dans le cadre de la théorie de la mesure et sont à la base de l'analyse fonctionnelle.

Exemple 16 : Dans $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $p \geq 1$, Minkowski montre que $\|.\|_p$ est une norme. Holder nous donne l'inclusion $L^p \subset L^q$ si $p \geq q$ et $\mu(\Omega) < +\infty$

II Convexité en dimension supérieure

1) Dimension finie

Théorème / Def 17 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. On a l'équivalence :

(i) f est convexe ($\forall x, y \in U, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$)

(ii) $\forall x, y \in U$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

(iii) $\forall x, y \in$ $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$

Et si f est deux fois différentiable

(iv) $\forall x, h \in U$ $\langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0$

Application 18 : (ii) permet de montrer que les minimums d'une fonction convexe sont globaux.

Remarque 19 : Lorsque f est continue (i) avec $t = \frac{1}{2}$ suffit à montrer que f est convexe.

Application 20 : Si $A \in S_n$ une matrice symétrique alors on a l'équivalence : (i) $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe
(ii) A est positive.

2) Espace de Hilbert

Soit $(H, \langle . \rangle)$ un espace de Hilbert

Théorème 21 (Projection sur un convexe fermé)

Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in H, \exists! u \in K / \|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$

De plus u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Application 22 (Séparation des convexes)

Soit $A \subset H$ un compact et $B \subset H$ un fermé convexes. On suppose A et B non vides et disjoints. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B i.e $\exists \varphi \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) < \alpha < \varphi(y)$ $\forall (x,y) \in A \times B$

Application 23 : Permet de résoudre des problèmes de minimisation (Voir III)

Théorème 24 (Représentation de Riesz)

Soit $\varphi \in H'$, $\exists ! y \in H$ tel que $\varphi = \langle y, \cdot \rangle$

DEV 1

Théorème 25 (Stampacchia) Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue coercive. Soit K un convexe fermé non vide. Soit $\varphi \in H'$; il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad \forall v \in K$$

Si de plus a est symétrique u est caractérisé par : $\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$

Application 26 : Le problème de l'obstacle.

III Optimisation, recherche d'extremum.

1) Minimisation, résultats théoriques.

Proposition 27 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ convexe et differentiable.

(i) f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$

(ii) Si f est convexe les minimums locaux sont globaux

(iii) Si f est strictement convexe, f admet un unique minimum global.

Théorème 28 : Soit H un espace de Hilbert séparable et $C \subset H$ un convexe fermé. Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue tel que

$$\lim_{\substack{x \in C \\ \|x\| \to +\infty}} f(x) = +\infty \text{ si } C \text{ n'est pas borné}$$

Alors il existe $u \in C$ tel que $f(u) = \inf\limits_{x \in C} f(x)$

2) Étude numérique

a) Méthode de Newton, cas convexe.

Théorème 29 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, on suppose $c < d$ et $f(c) < 0 < f(d)$, $f'(x), f''(x) > 0$ sur $[c,d]$. On pose : $\begin{cases} F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ x_{n+1} = F(x_n) \quad x_0 \in [c,d] \end{cases}$

Alors f admet un unique 0 sur $]c,d[$, l'intervalle $I = [a,d]$ avec a le zéro de f, est stable par F et $\forall x_0 \in I$, x_n converge à l'ordre 2 vers a.

b) Méthode du gradient à pas optimal

DEV 2

Théorème 30 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle \end{array}$$

Alors f admet un unique minimum x^* sur $\mathbb{R}^n$, caractérisé par $\nabla f(x^*) = 0$. Et pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \text{ avec } \begin{cases} d_k = -\nabla f(x_k) \\ t_k = \underset{t \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, f(x_k + t d_k) \end{cases}$$

Converge vers x^* et

$$\|x_k - x^*\| \leq \left(2 \frac{f(x_0) - f(x^*)}{\lambda_n} \right)^{1/2} \left(\frac{c(A)-1}{c(A)+1} \right)^k$$

avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ vp de A et $c(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$

Ciarlet
Roberts, Convex functions