UTILISATION DE LA NOTION DE CONVEXITE EN ANALYSE

253

CADRE : Dans toute cette leçon, la lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

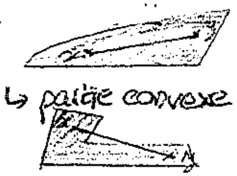
I/ Généralités et premiers résultats sur les ensembles et sur les fonctions convexes. [H-H] p.225-226

A) Ensembles convexes dans un espace vectoriel

Dans toute cette section, E désigne un espace vectoriel sur K

<u>Déf</u> : • Soient $x, y \in E$. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble $[x;y]_E := \{(1-t)x + ty : t \in [0;1]\}$.

• On dit qu'une partie A de E est convexe si pour tout couple $(x,y) \in A^2$, le segment $[x;y]_E$ de E est contenu dans A.



↳ partie convexe

↳ partie non convexe

<u>Rem</u> : Tout ensemble convexe est connexe par arcs (donc connexe) mais la réciproque est fausse.

<u>Ex</u> : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ est connexe par arcs mais n'est pas convexe.

<u>Ex</u> : • Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

• Pour tout sous espace vectoriel F de E et tout $a \in E$, $a + F = \{a + x : x \in F\}$ est un sous-espace convexe de E.

<u>Prop</u> : (i) Soit A une partie convexe de E. Si $0 \in A$, alors $tA \subset A$ pour tout $t \in [0;1]$

(ii) Si A et B sont deux parties convexes de E et si $\lambda \in K$, alors $\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$ et $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ sont convexes.

(iii) L'intersection de parties convexes de E est convexe.

B) Le lien avec les fonctions convexes. [ROMB] p.233

<u>Déf</u> : Si C est une partie convexe de E et si f est une fonction de C dans $\mathbb{R}$, on dit alors que f est convexe sur C si pour tout couple $(x,y) \in C^2$ et pour tout $t \in [0;1]$, on a : $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$. On dit que f est strictement convexe si pour tout $(x,y) \in C^2$ et pour tout $t \in]0;1[$, on a : $f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$.

• f est dite concave (resp. strictement concave) si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).

<u>Déf</u> : Si C est une partie convexe de E et si $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction, on appelle alors épigraphe de f, le sous-ensemble $\mathcal{E}(f) := \{(x,y) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ de $E \times \mathbb{R}$ [ROMB] p.233

<u>THM</u> : Avec les mêmes notations, f est convexe si et seulement si son épigraphe $\mathcal{E}(f)$ est convexe.

Pour les deux résultats suivants, I désigne un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

<u>Prop</u> : La fonction f est convexe si et seulement si pour tout couple (A,B) de points du graphe de f (avec $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ et $a < b$), la courbe représentant f sur l'intervalle $[a;b]$ est au-dessous du segment $[AB]$ → cf annexe (figure 1). [ROMB] p.234

<u>Prop</u> : La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si pour tout couple $(x,y) \in I^2$, la fonction $f_{x,y} : t \in [0;1] \mapsto f((1-t)x + ty) \in \mathbb{R}$ est convexe sur $[0;1]$. [ROMB] p.235

<u>Ex</u> : • $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est une fonction convexe.

• toute fonction affine est à la fois convexe et concave.

<u>Rem</u> : Le produit et la composition de fonctions convexes ne sont pas forcément des fonctions convexes.

C) Théorèmes de projection et de séparation

1) Projection sur un convexe.

Soient $(E, \langle,\rangle)$ un K-esp. préhilb. et C une partie convexe de E. [H-H] p.353-354

Soient $x, y \in E$ et soient $a, b \in C$.

<u>Prop</u> : $[\|x-a\| = d(x,C)] \Leftrightarrow [\forall z \in C, \mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle) \leq 0]$.

<u>Cor</u> : Si on suppose que $\|x-a\| = d(x,C)$ et que $\|y-b\| = d(y,C)$, on a alors $\|a-b\| \leq \|x-y\|$. En particulier, pour tout $z \in E$, il existe au plus un point $a \in C$ tq $\|z-a\| = d(z,C)$.

THM (de la projection) : Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et C une partie convexe et non vide de E. Si C est complète pour la distance induite par la norme de E, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique point $a \in C$ tel que $\|x-a\| = d(x, C)$. Ce pt noté $P_C(x)$ est appelé projection de x sur C.

2) Séparation des ensembles convexes.

Dans toute cette sous-section, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Déf : Un hyperplan fermé H de E est un ensemble de la forme $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ avec f une forme linéaire $\neq 0$ continue sur E et α une constante réelle. p.315

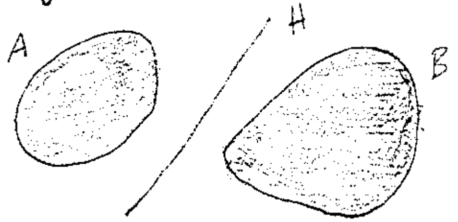
Déf. Soient A et B deux sous-ens non vides de E et $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ un hyperplan affine fermé de E.

- On dit que H sépare (au sens large) A et B si pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$.
- On dit que H sépare strictement A et B si pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) < \alpha < f(b)$.

THM (Hahn-Banach géométrique) : Soient A et B deux parties convexes non vides et distincts de E.

(i) Si A est ouvert, il existe alors $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < \alpha \leq f(b)$ pour tout $(a,b) \in A \times B$. En particulier $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ sépare A et B.

(ii) Si A est compact et B est fermé, il existe un hyperplan affine fermé qui sépare alors strictement A et B.



II / Inégalités de convexité.

1) Quelques inégalités classiques.

On énonce d'abord le critère utilisé en pratique qui permet montrer certaines inégalités qui suivent.

THM : Soient I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I. [ROMB] p.240

Prop : (i) $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (iii) $\ln(x) \leq x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ [ROMB] p.267

(ii) $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Prop (inégalité de Jensen) : Si f est une fonction convexe définie sur une partie convexe C d'un esp. vect. E, alors pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ d'éléments de C, on a : $f(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$. [ROMB] p.243

Prop (inégalité arithmético-géométrique) : Si pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on a alors $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ [GOU] p.95

APP (Hölder et Minkowski dans $\mathbb{R}^n$) : [GOU] p.95-96

- Si $p, q > 0$ sont deux exposants conjugués et $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on a alors $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}$
- Si $p \geq 1$ et si $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on a alors $(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{1/p}$.

2) Inégalités dans les espaces L^p.

Dans cette sous-section $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré et sauf mention du contraire $p \in [1; +\infty]$.

Pour $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable, on note $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ lorsque $p < +\infty$ et $\|f\|_p = \sup ess(f)$ quand $p = \infty$

THM (inégalité de Hölder) : Si $p, q \in [1; \infty]$ sont deux exposants conjugués, on a alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ [MARC] p.257

(Les deux membres de l'inégalité étant bien sûr finis si $fg \in L^1(X)$, $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$).

[MARC] p.288 **THM (inégalité de Minkowsky)**: Si f et g sont deux fonctions mesurables de X dans K, on a alors pour tout $p \in [1;\infty]$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

APP: Pour chaque $p \in [1;\infty]$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces vectoriels normés.

III / Optimisation et convexité des fonctions

A) Fonctions convexes et extremums

THM: Soit f une fonction définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

[ROUV] p.354 (i) Si f est convexe et différentiable en un point a de U tel que $df_a = 0$, alors f admet un minimum global en a.

[ROUV] p.304 (ii) Si f est deux fois différentiable sur U, alors f est convexe sur U si et seulement si sa différentielle seconde d^2f est une forme quadratique définie positive en tout point de U.

($\to$ cf Annexe - figure 2)

[O-A] p.30 **Prop**: Si U est un (ouvert) convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et si $f: U \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement convexe, alors il existe au plus un point minimisant f sur U.

[ENS3] **APP**: • Convexité logarithmique du déterminant dans S_n^{++}

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $\alpha+\beta=1$, on a alors: $\det(\alpha A+\beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$.

[ENS3] p.229 • Ellipsoïde de John-Loewner: Si C est un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, il existe alors une unique ellipsoïde centrée en 0 et de volume minimal contenant C.

B) Utilisation de la notion de point fixe

1) Méthode de Newton

Considérons ici une fonction $f: [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (avec $c<d$) telle que $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ pour tout $x \in [c;d]$. Si on note a l'unique réel de $]c;d[$ tel que $f(a)=0$ et $F: [c;d] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, il existe alors $\alpha>0$ telle que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} := F(x_n)$ $\forall n$ converge quadratiquement vers a. Si de plus, f est convexe sur $[c;d]$, alors $I := [a;d]$ est stable par f et si $x_0>a$, alors $x_{n+1}-a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$. [ROUV] p.140-144

(cf figure 3)

2) Un exemple d'utilisation en probabilités: L'étude de la transmission d'un nom de famille

[COTT] p.72-74 On étudie la transmission d'un nom X porté à l'origine par un seul homme formant la génération 0. Les descendants mâles directs de la n-ième génération forment la génération $n+1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_k la probabilité d'un homme ait k fils (constante au cours du temps). On suppose enfin que $0<p_0<1$.

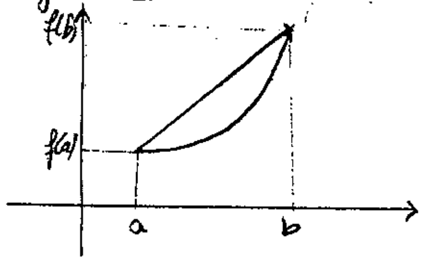
THM: Si on note $m := \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k$, alors la probabilité que le nom X s'éteigne avant la n-ième génération tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ si $m \leq 1$ et tend vers l'unique point fixe sur $[0;1[$ de la fonction $G: s \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ sinon.

3) Une forme simplifiée du théorème de Brouwer

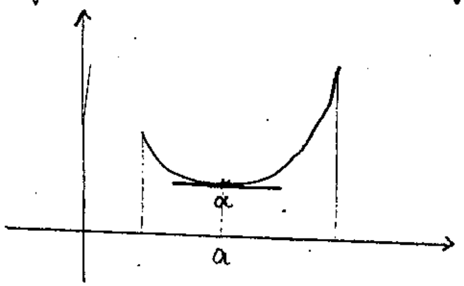
[GOU2] p.52 **Prop**: Si C est une partie compacte et convexe d'un K-espace vectoriel normé et si $f: C \to C$ est une application continue vérifiant $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$ $\forall (x,y) \in C^2$, alors f admet au moins un point fixe.

ANNEXE :

* Figure 1 :



* Figure 2 - Minimum d'une fonction convexe :

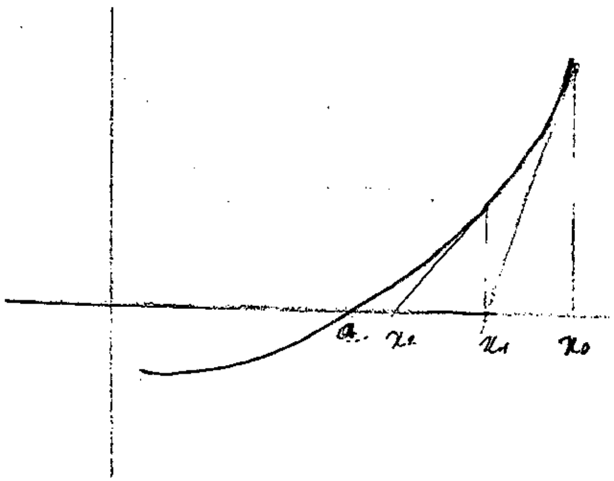


FIN DE LA PARTIE I/A). [ROMB] p.248

Déf : Soient $x_1, \dots, x_p \in E$. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire convexe des x_i s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ et $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$.

Prop : Toute partie convexe de E est stable par combinaison linéaire convexe

* Figure 3 - Méthode de Newton



Références pour la leçon 253 :

[COTT] M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre – Exercices de probabilités

[ENS3] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas – Oraux x-ens. Exercices de mathématoques / Algèbre 3

[GOU2] X. Gourdon – Les maths en tête / Analyse (2e édition)

[MARC] J-P. Marco, H Boumaza, B. Collas, S. Collion, M. Dellinger, Z. Faget, L. Lazzarini, F. Schaffhauser – Mathématiques L3 / Analyse

[NEHH] N. El Hage Hassan – Topologie générale et espaces normés

[O-A] V. Beck, J. Malick, G. Peyré – Objectif Agrégation (2e édition)

[ROMB] J-E. Rombalbi – Eléments d'analyse réelle / CAPES et Agrégation de mathématiques

[ROUV] F. Rouvière – Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)

Projection sur un convexe fermé

Antoine Louazel & Fanny Remoué

Théorème de projection : Soit $(H, \langle \, , \rangle)$ un espace de Hilbert (où l'on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire). Si C est une partie convexe fermée de H et si $x \in H$, il existe alors un unique élément $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) := \inf \{\|x - z\| : z \in C\}$. Cet élément que l'on note $P_C(x)$, est appelé projection de x sur C.

Preuve : Posons $\delta := d(x, C)$. Il existe une suite $(y_n)_n$ d'éléments de C telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = \delta$. On souhaite montrer que $(y_n)_n$ converge et vu que H est complet, il suffit alors de prouver le fait que c'est une suite de Cauchy. La norme $\|\cdot\|$ étant issue du produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pour tous $x, y \in H$. On a donc pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\left\|(x - y_p) + (x - y_q)\right\|^2 + \left\|(x - y_p) - (x - y_q)\right\|^2 = 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 + \left\|x - y_q\right\|^2\right),$$

c'est-à-dire

$$(\star) : \left\|2x - y_p - y_q\right\|^2 + \left\|y_q - y_p\right\|^2 = 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 + \left\|x - y_q\right\|^2\right).$$

Or, comme C est convexe, $(y_p + y_q)/2 \in C$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, donc $\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\| \geq \delta$ ou encore $\left\|2x - y_p - y_q\right\|^2 \geq 4\delta^2$. Avec $(\star)$, on en déduit

$$\left\|y_q - y_p\right\|^2 \leq 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 - \delta^2 + \left\|x - y_q\right\|^2 - \delta^2\right).$$

Comme $\left\|x - y_p\right\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} \delta$, on voit donc bien que la suite $(y_n)_n$ est de Cauchy ; elle converge donc vers un élément y qui appartient bien à C car ce dernier est fermé et $\|x - y\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = \delta = d(x, C)$.

Il reste à montrer l'unicité de y. Supposons qu'il existe y et z dans C tels que $\|x - y\| = \|x - z\| = \delta$ et définissons une suite $(y_n)_n$ par $y_n = y$ si n est pair et $y_n = z$ si n est impair. Cette suite vérifie $\|x - y_n\| = \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier $\|x - y_n\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} \delta$ et par ce que l'on a fait plus haut, on déduit que $(y_n)_n$ converge et donc que $y = z$. Ceci prouve l'unicité et nous permet de conclure. ■

Proposition (caractérisation) : Avec les notations du théorème précédent, le point $P_C(x)$ est caractérisé par : $\forall z \in C, \Re(\langle z - P_C(x), x - P_C(x)\rangle) \leq 0$.

Preuve : Dans toute cette démonstration, on écrit $x_C := P_C(x)$ afin d'alléger les notations.

Dans un premier temps, on fixe $y \in C$, on suppose que $\Re(\langle z - y, x - y\rangle) \leq 0$ pour tout $z \in C$ et on souhaite montrer que $y = x_C$.

$$\begin{aligned}\forall z \in C, \|z-x\|^2 &= \|(z-y)-(x-y)\|^2\\ &= \|z-y\|^2+\|x-y\|^2-2\Re(\langle z-y, x-y\rangle)\\ &\geq \|z-y\|^2+\|x-y\|^2\\ &\geq \|x-y\|^2\end{aligned}$$

et donc $\|z-x\| \geq \|x-y\|$, pour tout $z \in C$. De plus $y \in C$, donc $\|x-y\| = d(x, C)$. D'après le théorème précédent, on obtient donc $y = x_C$.

Dans un second temps, on montre que la propriété est vérifiée pour x_C. Pour tout $z \in C$, on a $\|z-x\|^2 \geq \|x-x_C\|^2$ et en développant $\|z-x\|^2 = \|(z-x_C)-(x-x_C)\|^2$, on obtient alors :

$$(\therefore) : \forall z \in C, \|z-x_C\|^2 - 2\Re(\langle z-x_C, x-x_C\rangle) \geq 0.$$

On veut maintenant se débarrasser du terme $\|z-x_C\|^2$ et on pose pour cela $z \coloneqq tz_0 + (1-t)x_C$ pour $z_0 \in C$ et $t \in [0\,;1]$ (C étant convexe, $z \in C$). Appliquons maintenant $(\therefore)$ à ce z :

$$t^2\|z_0-x_C\|^2 - 2t\Re(\langle z_0-x_C, x-x_C\rangle) \geq 0$$

et donc :

$$t\|z_0-x_C\|^2 - 2\Re(\langle z_0-x_C, x-x_C\rangle) \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient alors le fait que $\Re(\langle z_0-x_C, x-x_C\rangle) \leq 0$. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in C$, la preuve est donc faite. ■

<u>Référence :</u> X. Gourdon – <u>Les maths en tête / Analyse</u> (2e édition) (pages 407-409)

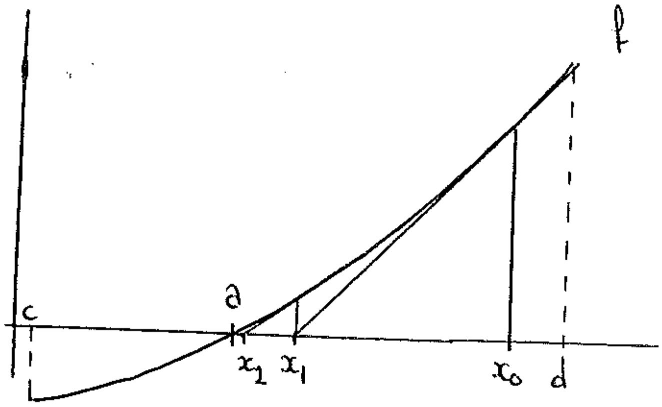
Méthode de Newton

[Rouvière] p 140

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, on suppose $c < d$; $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0 \ \forall x \in [c,d]$.

On pose $x_{n+1} = F(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ \forall x \in [c,d]$.

Alors (x_n) converge de manière quadratique vers l'unique zéro a de f sur $[c,d]$.



① f étant strictement croissante de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$, elle admet un unique zéro sur $]c,d[$, noté a.

On a donc $\underline{F(a) = a}$.

Comme $f(a) = 0$ on peut écrire :

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \qquad \forall x \in [c,d]$$

$$= \frac{f'(x)(x-a) + f(a) - f(x)}{f'(x)}$$

Comme f est C^2 sur $[c,d]$, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et a, $\forall x \in [c,d]$:

$\exists z$ compris entre a et x tel que :

$$f(a) - f(x) = (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(z).$$

Donc $\boxed{F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2}$ ⊛

② Montrons maintenant qu'il existe un intervalle I inclu dans $[c,d]$ tel que $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge de manière quadratique vers a.

- Posons $C = \frac{1}{2} \frac{\max f''(x)}{\min f'(x)}$ (min et max sur $[c,d]$)

On a alors par ⊛ : $\boxed{|F(x) - a| \leqslant C|x-a|^2}$ $\forall x \in [c,d]$ ⊕

Soit $\alpha > 0$ tel que $C\alpha < 1$ et assez petit pour que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit contenu dans $[c,d]$.

Si $x \in I$, alors $|x-a| < \alpha$ donc $|F(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < \alpha$ d'où $F(I) \subset I$.

- Si $x_0 \in I$, on a donc $x_n \in I$ $\forall n$ et $|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$ d'où $C|x_n - a| \leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant (C\alpha)^{2^n}$

Comme $C\alpha < 1$ on a bien convergence d'ordre 2 de (x_n) vers a.

③ Supposons maintenant que f est strictement convexe sur $[c,d]$, montrons que ② est vérifié sur $I = [a,d]$, que (x_n) est strictement décroissante ou constante et que l'inégalité ⊕ est optimale.

- $\forall x \in [a,d]$, $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) > 0$ d'où

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x \\ \text{avec inégalité stricte si } x > a. \end{array}\right\} \ (\alpha)$$

- Comme $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [c,d]$, on a également :

$$\left.\begin{array}{l} F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2 \geqslant 0 \\ \text{avec inégalité stricte si } x > a. \end{array}\right\} \ (\beta)$$

De ① et ② on déduit que $I = [a, d]$ est stable par F.
Ainsi, si $x_0 \in I$, $x_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Si $x_0 \in]a, d]$, on a $x_n \in]a, d]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et (x_n) est strictement décroissante par ①.
- Si $x_0 = a$ alors $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ie (x_n) est constante.

Ainsi (x_n) est convergente, vers un réel ℓ vérifiant $F(\ell) = \ell$ donc $f(\ell) = 0$ ie $\ell = a$.

On a également $0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2$ comme en ② d'où une convergence d'ordre 2.

De plus, si $x_0 \in]a, d]$, $x_n > a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \leqslant \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \quad \text{par } (*) \text{ avec } a < z_n < x_n$$

d'où $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} = \frac{f''(a)}{f'(a)}$.

On a donc un équivalent en l'infini :

$$x_{n+1} - a \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

<u>Remarque</u>: On peut voir dès le départ que le point a est superattractif car $F'(a) = 0$; on s'attend donc à une convergence d'ordre 2.