Cadre : E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse

I. Parties convexes, fonctions convexes

A - Définitions et exemples

Déf° 1 : Soit C une partie de E. On dit que C est convexe si : $\forall (x,y) \in C^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

Ex 2 :
- Dans $\mathbb{R}$, les intervalles sont convexes.
- Soit f forme linéaire sur E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le demi espace $H(f,\alpha) = \{x \in E, f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.
- Le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ ne l'est pas.

Prop° 3 : Soit $(C_i)_{i\in I}$ famille de convexe, alors $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Déf° 4 : Soit $C \subset E$ convexe et $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe (resp. strictement convexe) sur C si : $\forall \lambda \in [0,1]$ $\forall (x,y) \in C^2$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

(resp. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall x \neq y$)

Ex 5 :
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto e^x$ sont convexes.

Rq 6 : On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Prop° 7 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$. On pose $\mathrm{epi}(f) = \{(x,\lambda) \in C \times \mathbb{R},\ f(x) \leq \lambda\}$ son épigraphe. Alors f convexe ssi son épigraphe l'est.

B - Enveloppe convexe

Déf° 8 : Soit $A \subset E$. On définit l'enveloppe convexe de A comme l'intersection de tous les convexes de E contenant A. On la note $Cv(A)$.

Théo 9 (De Lucas) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Prop° 10 : Soit $A \subset E$. $Cv(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Théo 11 (Carathéodory) : Soit $A \subset E$. Tout élément de $Cv(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim(E)$.

Coro 12 : Soit $A \subset E$. Si A compacte, $Cv(A)$ aussi.

C - Séparation des convexes

Déf° 13 : Soient $A, B \subset E$. On dit que l'hyperplan $H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B :

Au sens large : si l'on a : $f(x) \leq \alpha$ $\forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ $\forall x \in B$.

Au sens strict : si $\exists \varepsilon > 0$: $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ $\forall x \in A$, $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ $\forall x \in B$.

Théo 14 : (H-B géométrique) : Soient A et B deux convexes non vides disjoints, avec A ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Théo (15) : $A, B \subset E$ deux convexes non vides disjoints, tels que A est fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

I) Fonctions convexes et régularité

Prop° (16) : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall x_0 \in I$, $g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ est croissante.

Prop° (17) : $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{C}$ convexe de $\mathbb{R}^n$). Si f est convexe alors f est continue sur $\mathring{\mathcal{C}}$.

Prop° (18) : Soit $\mathcal{C}$ ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathcal{C}$. Les ASSE :

1) f est convexe
2) $\forall x, y \in \mathcal{C}$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$
3) $\forall x, y \in \mathcal{C}$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$.
4) Si f deux fois différentiable :
$\forall x, h \in \mathcal{C}$, $\langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0$.

Ex (19) : $A \in S_n$. $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ convexe $\Leftrightarrow$ A positive.

II. Inégalités de convexité

Prop° (20) : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^n$

Prop° (21) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$

- $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$
- $\forall x \in]0, \pi[$, $\sin(x) \leq x$.

Prop° (22) : (Inégalité de Young) : $p, q \in \mathbb{R}$.
$\forall a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Appli (23) : (Inégalité de Hölder) :
Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors, $fg \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Appli (24) : $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un ev normé.

Théo (25) : (Inégalité de Jensen) :
Soit ϕ convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $\phi(f)$ soient intégrables par rapport à une mesure de probabilité μ. Alors :

$$\phi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \phi(f) \, d\mu.$$

III. Résultats d'optimisation

A. Fonctions convexes et extrema

Prop° (26) : Soit C convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ convexe. Alors, les ensembles de niveau de f, i.e $\{x, f(x) \leq \alpha\}$ sont convexes, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Coro (27) : $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Alors, il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ qui minimise f.

Lemme 28 : Soient A et B deux matrices symétriques réelles définies positives. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors on a :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^{\alpha} (\det(B))^{\beta}$$

Application 29 : Soit K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Prop° 30 : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe. Si f est différentiable en $a \in U$ et $Df(a) = 0$ alors f admet un minimum global en a sur U.

EX 31 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ a un minimum global en 0.

C-E 32 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ n'a pas de minimum en 0, elle n'est pas convexe.

B) Points fixes

Théo 33 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$, pour tout $x \in [c,d]$. On définit la suite : $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Soit a l'unique zéro de f dans $]c,d[$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha]$ stable par F et $(x_n)_n$ converge vers a, $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$.

Si de plus, f est convexe, alors $I = [a,d]$ est stable et $(x_n)_n$ converge de façon quadratique vers a, $\forall x_0 \in I$.

Appli 34 : Soit $y > 0$. Si on prend $f(x) = x^2 - y$, cette méthode permet d'approcher $\sqrt{y}$, et ce de façon quadratique.

Théo 35 : Soit $\mathcal{C}$ convexe compact d'un evn. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 1-lipschitzienne sur $\mathcal{C}$. Alors F admet (au moins) un point fixe.

C-E 36 : Le théorème est faux si $\mathcal{C}$ n'est pas convexe. On peut prendre une rotation sur un cercle.

C) Théorèmes de projection

Théo 37 : Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Alors, $\forall x \in H$, $\exists ! \, y \in \mathcal{C}$, $d(x, C) = \|y - x\|$.

EX 38 : $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, dx = \frac{1}{n+1}$

Théo 39 : (Stampacchia) : Soit H un Hilbert. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe, fermé et non vide. Soit $L \in H'$. Alors, $\exists ! \, u \in K$ tq : $a(u, v-u) \geq \langle L, v-u \rangle$, $\forall v \in K$. De plus si a est symétrique, alors u est caractérisé par : $u \in K$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \langle L, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle L, v \rangle \right\}$

Coro 40 : Ceci reste vrai en remplaçant K par H : c'est le théorème de Lax-Milgram.