Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

I) $S(\mathbb{R}^d)$ et transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$

I.1) $S(\mathbb{R}^d)$

Def1: On dit qu'une fonction $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et si toutes ses dérivées sont à "décroissance rapide", i.e :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \|_\infty < \infty$$

où, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Exemple2: . $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset S(\mathbb{R}^d)$

. La fonction $f : x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ est dans $S(\mathbb{R}^d)$.

Proposition3: . $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation et multiplication par des polynômes.

. $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} 0$.

. $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication

. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, N_p est une norme sur $S(\mathbb{R}^d)$.

. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $S(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème4: * Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(\varphi - \varphi_j) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$$

* En particulier $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $S(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie associée aux normes N_p.

I.2) Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$

Motivation: On introduit $S(\mathbb{R}^d)$ car $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas stable par transformée de Fourier.

Def5: La transformée de Fourier d'une fonction $f \in S(\mathbb{R}^d)$ est la fonction définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \mathcal{F} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx.$$

($\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$)

Exemple6: Pour $g \in \mathbb{C}$, $Re(g) > 0$, $f(x) = e^{-g|x|^2} \in S(\mathbb{R}^d)$ et :

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{g}} \right)^d e^{-|\xi|^2 / 4g}$$

Inversion de Fourier (DEV1)7:

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de S dans S, d'inverse $\bar{\mathcal{F}} : S \to S$

$$g \mapsto \bar{\mathcal{F}} g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} g(\xi)\, d\xi$$

Proposition8: Soit $(f, g) \in S(\mathbb{R}^d)^2$. Alors :

* $\int \hat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int f(x) \hat{g}(x)\, dx$
* $\int f(x) \bar{g}(x)\, dx = (2\pi)^{-m} \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi)\, d\xi$
* $f * g \in S$ et $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$
* $\widehat{D_j f} = \xi_j \hat{f}$ où $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$
* $\widehat{x_j f} = - D_j \hat{f}$ où $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

II) $S'(\mathbb{R}^d)$ et transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$

II.1) $S'(\mathbb{R}^d)$

Déf 9 : L'espace $S'(\mathbb{R}^d)$ est le dual topologique de $S(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $S(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$.
. De manière plus formelle $T \in \mathcal{L}(S, \mathbb{C})$ est dans S' si et seulement si :

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2, \exists c > 0, \forall \varphi \in S \ |\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_{L^\infty}$$

Propriétés 10 :

* $S'(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par application $T \mapsto T_{|\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$.
* Si $T \in S'$, alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ et $x_i T$ sont dans S' pour $i \in [\![1; d]\!]$.
* Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$.
* Toute fonction majorée par un polynôme est dans S'.

Exemple et contre-exemple 11 :

* Pour $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^x e^{ie^x}$ est dans S' mais n'est pas majorée par un polynôme.
* La fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ n'est pas dans S'.

Déf 12 : Soit $(T_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (S'(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ et $T \in S'(\mathbb{R}^d)$.
On dit que la suite $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers T si :
$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d), \ \langle T_m, \varphi \rangle \xrightarrow[m \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$$

II.2) Transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$

Prop-Déf 13 : Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. L'application linéaire $\mathcal{F}T : S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$
$$\varphi \mapsto \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$
est dans l'ensemble $S'(\mathbb{R}^d)$: c'est la transformée de Fourier de $T \in S'$.

Théorème d'inversion 14 :
La transformée de Fourier sur S' est une application linéaire, bijective et bicontinue de S' dans S'. Plus précisément $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$ où $\bar{\mathcal{F}}$ est définie par $\langle \bar{\mathcal{F}} T, \varphi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}} \varphi \rangle$.

Exemples 15 : . $\mathcal{F}\delta_0 = 1$

. $\mathcal{F}1 = (2\pi)^m \delta_0$
. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $T = e^{i\lambda|x|^2} \in S'(\mathbb{R}^d)$ et :
$$\mathcal{F}T = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i \operatorname{sgn} \lambda \cdot \frac{\pi}{4}} \right)^m e^{-\frac{i|\xi|^2}{4\lambda}}$$

Propriétés 16 :
La transformée de Fourier dans S' coïncide avec la transformation de Fourier dans S si $T \in S$.

. $\forall T \in S'$, $\mathcal{F}(D_j T) = \xi_j \mathcal{F}T$, où $D_j = \frac{1}{i} \partial_j$
. $\forall T \in S'$, $\mathcal{F}(x_j T) = -D_j \mathcal{F}T$.
. Si $T_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} T$ dans S', alors $\mathcal{F}T_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} \mathcal{F}T$

III) Utilisation théorique et applications

III.1) Prolongement à $L^2(\mathbb{R}^d)$

Remarque : . $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ donc on ne peut pas définir $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Déf 17 : Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f, que l'on note $\mathcal{F}f$ comme la transformée de Fourier de f vu comme un élément de $S'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 18 :

L'application
$$L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$
$$f \longmapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}f$$
est une application isométrique bijective de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même d'inverse $(2\pi)^{-n/2}\bar{\mathcal{F}}$.

III.2) Formule sommatoire de Poisson

Théorème 19 (OEV2) :
Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\cdot+m)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)$$

Application 20 :

Soit $N \geq 0$, on pose $T_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_n \in S'(\mathbb{R})$.
Alors $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers une distribution $\delta_{\mathbb{Z}}$ qui vérifie : $\hat{\delta}_{\mathbb{Z}} = \delta_{\mathbb{Z}}$

III.1) Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

Théorème 21 : (admis)
* Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \{t \in \mathbb{R}^d / |t| \leq r\}$.
Il existe une fonction $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^d$ telle que $F(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ et :

(α) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, |F(\eta)| \leq C_N (1+|\eta|)^{-N} e^{r|\operatorname{Im}\eta|}$ $\forall \eta \in \mathbb{C}^d$

* Réciproquement, soit $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant (α). Alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset \{t \in \mathbb{R}^d / |t| < r\}$ et $\hat{\varphi}(\xi) = F(\xi)$ si $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Corollaire 22 :

La transformée de Fourier d'une fonction non nulle de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est jamais dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Réf : * Jean-Michel Bony / Cours d'analyse
* Claude Zuily / Eléments de distributions et d'EDP
* Zuily Queffélec
(* Briane et Pagès)