254

Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. & Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

I Espace de Schwartz et distributions tempérées

1) Espace de Schwartz

Déf 1: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x^\alpha \partial^\beta f(x)\| \le C_{\alpha,\beta} \}$.

Ex 2:
- $f : x \mapsto e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- $\forall z \in \{Re\, z > 0\}$, $x \mapsto e^{-z\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$

Déf 3:
- $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, $p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\{p_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d\}$ définit une famille de semi-normes sur $\mathcal{S}$.
- $(\varphi_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in \mathcal{S}$. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \iff \forall \alpha,\beta,\ p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \to 0$
- $d(\varphi,\psi) := \sum_{k \ge 1} \frac{1}{2^k} \frac{\tilde{p}_k(\varphi-\psi)}{1+\tilde{p}_k(\varphi-\psi)}$ définit une distance sur $\mathcal{S}$, où $\tilde{p}_k := \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le k}} p_{\alpha,\beta}$

Prop 4: $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ est un espace métrique complet.

Prop 5:
- L'injection $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
- $\forall p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$

Prop 6: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par :
- multiplication par un polynôme
- dérivation
- multiplication
- convolution

2) Distributions tempérées

Déf 7: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{$formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}$.

- Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ssi $\exists k,l \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}, |\langle T,\varphi\rangle| \le C \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le l}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|$

Ex 8:
- $\mathbb{1} \in \mathcal{S}'$. Si P est un polynôme, $P \in \mathcal{S}'$
- $\forall p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$
- Les fonctions à croissance lente, i.e majorées par un polynôme, sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $x \mapsto e^{\|x\|} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Déf 9: Si $(T_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T \iff \forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle T_n,\varphi\rangle \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle$.

Ex 10: $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Rq 11 Le théorème de Banach-Steinhaus reste vrai dans $\mathcal{S}'$.

Déf 12: $T \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ est d'ordre $\le k$ si $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^d, \exists C_K > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, $|\langle T,\varphi\rangle| \le C_K \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in K} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|$
T est d'ordre k si T est d'ordre $\le k$ mais pas $\le k-1$

Ex 13 : • $vp\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est d'ordre 1

• $T : \varphi \mapsto \sum_{j \geq 0} \varphi^{(j)}(j) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est d'ordre infini.

Déf 14 : • Pour $T \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$,

$\operatorname{supp} T := {}^c\{x_0 \in \mathbb{R}^d, \exists \omega \text{ ouvert} \ni x_0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), \langle T, \varphi \rangle = 0\}$

• $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp} T \text{ est compact}\}$.

Ex 15 : $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ car $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$

Th 16 : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Alors $\exists k, \exists (a_\alpha)$ tels que $T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

Prop 17 : Si $T \in \mathcal{E}'$, T est d'ordre fini.

Prop 18 : Si $T \geq 0$, i.e $\forall \varphi \in \mathcal{D}', \varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0$, alors T est d'ordre 0.

Prop 19 : Si $f \in \mathcal{E}$ est à croissance lente, i.e $|f(x)| \leq |P(x)|$ où P polynôme, alors $\forall T \in \mathcal{S}'$, $fT \in \mathcal{S}'$, où $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$

Déf 20 : Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on définit la dérivée $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

Ex 21 : • $\delta_0' : \varphi \mapsto \varphi'(0)$, $\mathbb{1}_{[a,b]}' = \delta_a - \delta_b$

• $\log|x|' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$

Prop 22 (Formule des sauts) : Soit (x_n) strictement croissante telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $x_0 := -\infty$, $\Omega_j :=]x_j, x_{j+1}[$

Soit $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R})$ telle que $f_{|\Omega_j} \in \mathcal{C}^1(\Omega_j)$ et $f'_{|\Omega_j} \in L^1(\Omega_j)$

Alors $f' = \{f'\} + \sum_{j=1}^{+\infty} (f(x_j^+) - f(x_j^-)) \delta_{x_j}$ où $\{f'\}$ est la dérivée presque partout de f.

Déf 23 : Si $T \in \mathcal{D}'$, $S \in \mathcal{E}'$, on définit $T * S \in \mathcal{D}'$ par

$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T_y, \langle S_z, \varphi(y+z) \rangle \rangle$.

Ex 24 : $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$.

II Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

1) Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Déf 25 : Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}\varphi(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx$

Ex 26 : Si $\varphi(x) = e^{-z\|x\|^2}$ avec $z \in \{\operatorname{Re} z > 0\}$ alors

$\hat{\varphi}(y) := \mathcal{F}\varphi(y) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^d e^{-\|y\|^2/4z}$

Th 27 : Si $\overline{\mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \\ \psi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, y \rangle} \psi(y) dy \end{cases}$ alors $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$.

De plus, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme bicontinu.

Prop 28 : (i) $\int \hat{\varphi} \psi = \int \varphi \hat{\psi}$

(ii) $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}$

(iii) $\widehat{\varphi \psi} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\varphi} * \hat{\psi}$

(iv) $\widehat{\partial_j \psi} = i y_j \hat{\psi}(y)$

2) Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Déf 29 : Pour $T \in \mathcal{S}'$, $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$ et $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$

Ex 30 :
- $\mathcal{F}\delta_0 = \mathbb{1}$
- $\mathcal{F}\,vp\left(\frac{1}{x}\right) = -2i\pi H + i\pi$, H fonction de Heaviside $H(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$

Th 31 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ est un isomorphisme bicontinu, d'inverse $\overline{\mathcal{F}} : T \longmapsto (\varphi \mapsto \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle)$

Rq 32 : Pour $\varphi \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}\varphi$ dans $\mathcal{S}'$ coïncide avec $\mathcal{F}\varphi$ dans $\mathcal{S}$.

Prop 33 : Pour $T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}T$

Application 34 (Formule de Poisson) : Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\delta_{\mathbb{Z}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\delta}(n) = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}. \quad (\text{DVP 1})$$

III) Application à la résolution d'EDP

1) EDP linéaire à coefficients constants

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on cherche $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha u = f \quad (E)$$

Si u_0 est solution de $\sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha u_0 = \delta_0$ (E_0), alors $u_0 * f$ est solution de (E).

Pour calculer u_0, on utilise $\mathcal{F}$:

$$(E_0) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha i^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{u_0}(y) = 1$$

d'où $u_0(x) = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{P(y)}\right)$ avec $P(X_1, \dots, X_d) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha i^{|\alpha|} X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$

2) Équation de Schrödinger

Déf 35 : $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, $\langle u, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \langle u_t, \varphi(t,\cdot) \rangle dt$ et $t \mapsto \langle u_t, \varphi(t,\cdot) \rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Prop 36 : Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$, $\exists (u_t^{(1)}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ telle que $\frac{d}{dt}\langle u_t, \varphi(t,\cdot) \rangle = \langle u_t^{(1)}, \varphi(t,\cdot) \rangle + \langle u_t, \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\cdot) \rangle$

Prop 37 : $\forall g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, $t \mapsto \langle g, \varphi(t,\cdot) \rangle \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Th 38 : $\forall g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $(u_t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ à l'équation de Schrödinger

$$(E) \begin{cases} \partial_t u - i\Delta u = 0 & \text{au sens des distributions} \\ u_0 = g \end{cases}$$

De plus, $u_t = \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-it\|\cdot\|^2} \widehat{g}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. (DVP 2)

Références : [Z] C. Zuily, "Éléments de distributions et d'EDP"

[H-L] F. Hirsch - G. Lacombe, "Éléments d'analyse fonctionnelle"

[B] J.-M. Bony, "Cours d'analyse"