254 — Espaces de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ et distribution tempérées. Dérivation et transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

Cadre : On considère $d \in \mathbb{N}^*$

I- Espace de Schwartz et distributions tempérées

1°/ Espace de Schwartz

[ZUILY 107]

Déf 1 : L'espace $S = S(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions φ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \quad |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Rmq 2 : On peut définir S par :
$\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$

Ex 3 : * $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S$
* $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$ appartient à S
* plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$ la fonction sur $\mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à S.

Prop 4 : Muni des semi-normes $p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$ $S(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrisable et complet. ADMIS

Prop 5 : * S est stable par dérivation et multiplication par un polynôme
* Le produit de deux éléments de S appartient à S
* $\forall\ 1 \leq p \leq +\infty \quad S(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$

2°/ Distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^d)$

[BONY 170]

Déf 6 : On dit que T est une distribution tempérée, ce qu'on note $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ si T est une forme linéaire sur $S(\mathbb{R}^d)$ à valeur ds $\mathbb{C}$ et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tel que
$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \times \sum_{|\alpha| \leq p,\ |\beta| \leq p} p_{\alpha,\beta}(\varphi)$.

Ex 7 : * Toute fonction mesurable et majorée par un polynôme est une distribution tempérée.
* $vp(\frac{1}{x}) \in S'$ où $\forall \varphi \in S \quad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ [ZUILY 11?]
* $\delta_0 \in S'$

Contre-exemple 8 : $e^{x^2} \notin S'(\mathbb{R})$ [ZUILY 113]

Prop 9 : * $x_i T$ est dans $S'(\mathbb{R}^d)$ si $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ où $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle x_i T, \varphi \rangle := \langle T, x_i \varphi \rangle$
* $\forall\ 1 \leq p \leq +\infty \quad L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$

Prop 10 : Si $T \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors on peut définir une distribution dans $S'(\mathbb{R}^d)$ par la formule :
$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T(x) \varphi(x) dx$

Déf 11 : Soient $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de S' et $T \in S'$. On dira que $\lim_{j\to+\infty} T_j = T$ si $\forall \varphi \in S$ $\lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ [ZUILY 113]

Ex 12 : * On pose $f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1/n; +\infty[}(|x|)$. Alors $f_n \longrightarrow vp(\frac{1}{x})$ dans S'
* On pose $H_n(x) = e^{-x/n} H(x)$ où $H(x) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$ alors $H_n \longrightarrow H$ dans S'

3°/ Opérations sur les distributions tempérées

Déf 13 : Soit $T \in S'$. Alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est définie par $\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad \forall \varphi \in S$ [ZUILY 3?] Adapté

Prop 14 : Si $T \in S'$, alors toutes ses dérivées appartient à S' [BONY 17?]

Ex 15 : $e^x(\cos(e^x) + i\sin(e^x)) \in S'(\mathbb{R})$

Ex 16 : * $(\ln|x|)' = vp(\frac{1}{x})$ dans S' [ZUILY 3?]
* $H' = \delta_0$ dans S'
* $(vp(\frac{1}{x}))' = -Pf(\frac{1}{x^2})$ [ZUILY] exo 66

ex 15 : $e^x \cos(e^x)$ est ds S' mais $\nexists$ de polynôme qui majore $e^x \cos(e^x)$

[BONY 103] Prop 17 : Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $]a;b[$. On a alors : $f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{n} [f(a_{i+}) - f(a_{i-})]\,\delta a_i$ où f' est la dérivée au sens des distributions tempérées et $\{f'\}$ la fonction continue par morceaux dérivées usuelle en dehors des points a_i.

X Ex 18 : $f'(x) = \left(\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\right)' = 0 + (f(1^+) - f(1^-))\,\delta_1 + (f(-1^+) - f(-1^-))\,\delta_{-1} = -\delta_1 + \delta_{-1}$

[ZUILY 37] Prop 19 : Une distribution tempérée admet des dérivées de tous ordre. Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice et $T \in S'$, $\partial^\alpha T \in S'$ qui est définie par $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \times \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S$

X Prop 20 : Si $T_1, T_2 \in S'$, $\partial^\alpha (T_1 + \lambda T_2) = \lambda\, \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2$

[BONY 172] Thm 21 : Si $T_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} T$ dans S', on a $\partial^\alpha T_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} \partial^\alpha T$ dans S'

[ZUILY 112] Déf 22 : Posons $O_M(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0 \; |\partial_\xi^\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^k \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

— Déf 23 : Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$. Alors $fT \in S'$ où $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle \; \forall \varphi \in S$

[ZUILY 2] Adapté Prop 24 : Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$. Alors $\partial^\alpha (fT) = \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^d}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f\, \partial^{\alpha - \beta} T$ où $\alpha \in \mathbb{N}^d$

[ZUILY 36] Ex 25 : $x \times vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans S'

II - Transformée de Fourier

1°/ Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$

[ZUILY 108] Déf 26 : Pour $\varphi \in S$, la transformée de Fourier de φ que l'on note $F\varphi$ ou $\hat{\varphi}$, est la fonction sur $\mathbb{R}^d$ définie par $F(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)\,dx$ où $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \dots + x_d \xi_d$

Rmq 27 : Cette définition a bien un sens car $e^{-ix\cdot\xi}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ —

Ex 28 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. Soit $\varphi(x) = e^{-z|x|^2}$ —
On a $\hat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^d \times e^{-|\xi|^2/4z}$

Thm 29 : La transformée de Fourier F est une application linéaire bijective de S dans S. —
Si on pose pour $\psi \in S$, $\bar{F}\psi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi)\,d\xi$ DVPT 1
Alors $\bar{F}$ envoie S dans S et on a $F \circ \bar{F} = \bar{F} \circ F =$ identité

Rmq 30 : De plus, F est un homéomorphisme —

Prop 31 : Pour $\varphi, \psi \in S$, on a :

* $\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx = \int \varphi(\xi)\hat{\psi}(\xi)\,d\xi$
* $\int \varphi(x)\bar{\psi}(x)\,dx = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi$

En particulier, $\int |\varphi(x)|^2\,dx = (2\pi)^{-d} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi$

* $\varphi * \psi \in S$ et $F(\varphi * \psi) = \hat{\varphi} \times \hat{\psi}$
* $\widehat{\varphi \times \psi} = (2\pi)^{-d}\, \hat{\varphi} * \hat{\psi}$
* $\widehat{D_j \varphi} = i\xi_j \hat{\varphi}$ où $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$
* $D_j(\hat{\varphi}) = F\{(-ix_j \varphi(x))\}$ où $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

2°/ Transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$

Déf 32 : Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T est la distribution tempérée, notée F_T ou $\hat{T}$ définie par $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$ [ZUILY 11.]

Ex 33 : $F\delta_0 = 1$ —

Prop 34 : La transformée de Fourier dans S' coïncide avec la transformée de Fourier dans S si $T \in S$ —

Théo 35 : La transformée de Fourier est une application linéaire de $S'(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même d'inverse $F^{-1} = \bar{F}$ —

[ZUILY 114] **Prop 36**: Pour tout $T \in S'$, on a :

* $FFT = (2\pi)^d \check{T}$ où $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$
* $F(D_j T) = i\xi_j FT$
* $D_j(FT) = -F(ix_j T)$

[ZUILY 115] **Ex 37**: * $F1 = (2\pi)^d \delta_0 = \hat{1}$

[ZUILY 117] * $\widehat{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = -i\pi \, \mathrm{sign}(x)$

— * $\hat{H} = -i\, vp\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta$

[ZUILY 114] **Thm 38**: Si $T_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} T$ dans S', alors $\hat{T}_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} \hat{T}$ dans S'

X **Appl. 39**: $vp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} + i\pi\delta_0$

III - Applications

1°/ Transformée de Fourier dans L^1 et L^2

[ZUILY 119] **Thm 40**: * Si $T \in L^1$, $\hat{T}$ est donnée par la fonction continue $\hat{T}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} T(x)dx$

De plus, $\hat{T}$ tend vers 0 à l'infini.

* Si $T \in L^1$ et $\hat{T} \in L^1$, on a $F\hat{T} = (2\pi)^d \check{T}$ pp
* L'appl. $T \longmapsto (2\pi)^{-d/2} \hat{T}$ est une isométrie bijective de L^2 sur lui-même.

[OA 112] **Appl. 41**: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < \infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho(x)dx)$

2°/ Formule sommatoire de Poisson

Pour cette partie, on introduit une nouvelle normalisation de la transformée de Fourier
$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$

Théo 42: Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ [GOU] 272 DVPT 2

Appl. 43: $\forall s > 0 \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$ —

3°/ Résolution d'équations aux dérivées partielles

Soit $u \in S'(\mathbb{R}^{d+1})$ $(1)\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = \delta_0(x) \end{cases}$ [BONY 18

La solution de (1) dans S' est
$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \times e^{-|x|^2/4t}$

* $\Delta u = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^d)$ (2) X

La solution de (2) dans S' est
$u(x) = \sum_{|\alpha|\le d} (2\pi)^{-d} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} i^\alpha x^\alpha$

Zuily : éléments de distribution
Bony : Cours d'analyse
Zuily exo : exercices corrigés
Gasquet - Witomski

- Comment réécrire la formule sommation de Poisson en terme de distrib : $\sum \delta_n = \sum \hat{\delta}_n$. (avec $n \in \mathbb{Z}$)

$\sum f(n) = \sum \langle \delta_n, f \rangle = \langle \sum \delta_n, f \rangle = \langle \sum \delta_n, \hat{f} \rangle = \langle \widehat{\sum \delta_n}, f \rangle$

- Pourquoi on s'intéresse à l'app? fonct° θ de ~~Jacobi~~ Jacobi et surt* en Th des nbs.

- Calculer $\widehat{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \langle vp\left(\frac{1}{x}\right) | \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

vérifier que c'est bien une distrib.

- Calculer $\hat{H}$.

Développement: Formule sommatoire de Poisson et application

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

28 mars 2016

Référence : Gourdon analyse, page 272

On introduit une nouvelle normalisation de la transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}dt$

Théorème 1

Soit $f \in S(\mathbb{R})$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi xn}$

Application : $\forall s > 0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Etape 1 : Une idée pour construire des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction non périodique f consiste à considérer la série $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$

On veut montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall K > 0\ \forall x \in [-K, K]$, $\mid x+n \mid \geqslant n - \mid x \mid \geqslant n - K$

Comme $f \in S$, $f(x) = o_{|x|\to+\infty}(\frac{1}{x^2})$

On a alors $\exists M > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mid x \mid \geqslant 1$, $\mid f(x) \mid \leq \frac{M}{x^2}$

On a $\mid f(x+n) \mid \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(n-K)^2}$ indpt de x et terme général d'une série convergente.

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Notons $F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ sa limite simple.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

à l'oral

pas à l'écrit

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions car on a :
- la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge simplement vers F
- la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge uniformément

- les fonctions $f(\cdot+n)$ sont de classe C^1
Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc sur tout $\mathbb{R}$ par continuité.

Etape 2 :
De plus, F est 1-périodique car si on fixe $x\in\mathbb{R}$, on a $\forall N\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n)=\sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$
donc en faisant $N\to+\infty$, on en déduit $F(x+1)=F(x)$

Etape 3 : On calcule les coefficients de Fourier de F, pour $\forall n\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t \\ &\overset{1}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(t+k)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\underbrace{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nk}}_{=1}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t = \hat{f}(n) \end{aligned}$$

Enfin, comme F est $\mathcal{C}^1$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{F}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et F est somme de sa série de Fourier.
On a donc $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{F}(n)e^{2i\pi nx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$
Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2i\pi xn}$ ■

Application : $\forall s>0\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 s}=s^{-\frac{1}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Soit $\alpha>0$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f:x\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ qui vérifie les hypothèses du théorème.
On calcule, si $n\in\mathbb{Z}$, $\hat{f}(n)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha t^2}e^{-2\pi itn}dt$

$$\begin{aligned} &\overset{(u=\sqrt{\alpha}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}e^{-u^2}e^{-2\pi in\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}e^{-(u+\frac{i\pi n}{\sqrt{\alpha}})^2}e^{\frac{-\pi^2n^2}{\alpha}}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{-\pi^2n^2}{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}e^{-v^2}dv \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{-\pi^2n^2}{\alpha}} \end{aligned}$$

On applique la formule sommatoire de Poisson en $x=0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-\alpha n^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2n^2}{\alpha}}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha>0$, on prend $\alpha=\frac{\pi}{s}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 s}=s^{-\frac{1}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\frac{k^2}{s}}$ ■

1. on peut inverser car la série converge normalement.

Développement: Théorème d'isomorphisme de Fourier

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

22 mars 2016

Référence : Zuily-Queffelec, p329

Définition 1

Pour $u \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}u$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

Théorème 1

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$. Si on pose, pour $v \in \mathcal{S}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi$$

alors, $\overline{\mathcal{F}}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ =identité de $\mathcal{S}$, i.e $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration : Tout d'abord, $\hat{f}$ existe car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
  - $\hat{f}$ est C^∞ :
    (i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-itx} f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
    (ii)
    $$\forall q \in \mathbb{N}, \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[e^{-itx} f(x)\right] \right| = |x|^q |f(x)|$$
    Or, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\exists C \geq 0$ tel que
    $$|(x + x^{q+2}) f(x)| \leq C$$
    Donc,
    $$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[e^{-itx} f(x)\right] \right| \leq \frac{C}{(1+x^2)} \in L^1(\mathbb{R})$$
    Donc, $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et
    $$\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{br} (-ix)^q e^{-itx} f(x) dx$$
  - $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: Nous allons montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que
    $$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) dx$$

ce qui permettra de conclure, puisqu'alors, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t^p \hat{f}^{(q)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)dx| = C_{p,q} < +\infty \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

Pour $p = 0$, le résultat est vrai, puisque $x^q f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On suppose le résultat vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}\forall q \in \mathbb{N}, t^p \hat{f}^{(q)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_{p,q}(x) e^{-itx} dx \\ &\underbrace{=}_{IPP} \underbrace{\left[g_{p,q}(x) \frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x) dx\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}t^{p+1} \hat{f}(q)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g'_{p,q}(x)}{i} e^{-itx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{p+1,q}(x) e^{-itx} dx\end{aligned}$$

et

$$g_{p+1,q} = \frac{g'_{p,q}}{i} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

ce qui conclut la récurrence.

- Montrons maintenant que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt$$

Pour prouver que $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{itx} \hat{f}(t) dt$, il nous faut considérer l'intégrale , $\int e^{ixt} \left(\int e^{-iyt} f(y) dy \right) dt$, et on a envie d'échanger l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini. Mais, la fonction $(y,t) \mapsto e^{ixt} e^{-iyt} f(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. C'est pourquoi on introduit le facteur $e^{-\varepsilon t^2}$.

Comme,

$$|e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t)| \leq |\hat{f}(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

on a d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) dy \right) dt$$

Et

$$\int_{br^2} |e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} e^{-ity} f(y)| dy dt \underbrace{=}_{\text{Fubini-Tonelli}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right) < +\infty$$

Donc, $(y,t) \mapsto e^{ixt} e^{-iyt} f(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Fubini, on peut échanger l'ordre d'intégration :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{br} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{br} f(y) \underbrace{\left(\int_{br} e^{-it(y-x)} e^{-\varepsilon t^2} dt \right)}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-(y-x)^2/4\varepsilon} (\text{transformée de Fourier d'une Gaussienne})} dy$$

Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-(y_x)^2/4\varepsilon}dy$$
$$\underbrace{=}_{u=\frac{y-x}{2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}du$$

Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}du$$

Or,

$$|f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}| \leq \|g\|_\infty e^{-u^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc, par le théorème de convergence dominée, et par continuité de f,

$$\forall x\in\mathbb{R}, \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du\right)f(x) = f(x)$$

$\mathcal{F}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 1

— *En se donnant un peu de peine sur les notations (mais pas sur la forme), on généralise facilement ce résultat à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*