

Espaces de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ et distribution tempérées. Dérivation et transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.

254

EZULY 1071
EZULY 1072
EZULY 1073
EZULY 1074
EZULY 1075
EZULY 1076
EZULY 1077
EZULY 1078
EZULY 1079
EZULY 1080
EZULY 1081
EZULY 1082
EZULY 1083
EZULY 1084
EZULY 1085
EZULY 1086
EZULY 1087
EZULY 1088
EZULY 1089
EZULY 1090
EZULY 1091
EZULY 1092
EZULY 1093
EZULY 1094
EZULY 1095
EZULY 1096
EZULY 1097
EZULY 1098
EZULY 1099
EZULY 1100
EZULY 1101
EZULY 1102
EZULY 1103
EZULY 1104
EZULY 1105
EZULY 1106
EZULY 1107
EZULY 1108
EZULY 1109
EZULY 1110
EZULY 1111
EZULY 1112
EZULY 1113
EZULY 1114
EZULY 1115
EZULY 1116
EZULY 1117
EZULY 1118
EZULY 1119
EZULY 1120
EZULY 1121
EZULY 1122
EZULY 1123
EZULY 1124
EZULY 1125
EZULY 1126
EZULY 1127
EZULY 1128
EZULY 1129
EZULY 1130
EZULY 1131
EZULY 1132
EZULY 1133
EZULY 1134
EZULY 1135
EZULY 1136
EZULY 1137
EZULY 1138
EZULY 1139
EZULY 1140
EZULY 1141
EZULY 1142
EZULY 1143
EZULY 1144
EZULY 1145
EZULY 1146
EZULY 1147
EZULY 1148
EZULY 1149
EZULY 1150
EZULY 1151
EZULY 1152
EZULY 1153
EZULY 1154
EZULY 1155
EZULY 1156
EZULY 1157
EZULY 1158
EZULY 1159
EZULY 1160
EZULY 1161
EZULY 1162
EZULY 1163
EZULY 1164
EZULY 1165
EZULY 1166
EZULY 1167
EZULY 1168
EZULY 1169
EZULY 1170
EZULY 1171
EZULY 1172
EZULY 1173
EZULY 1174
EZULY 1175
EZULY 1176
EZULY 1177
EZULY 1178
EZULY 1179
EZULY 1180
EZULY 1181
EZULY 1182
EZULY 1183
EZULY 1184
EZULY 1185
EZULY 1186
EZULY 1187
EZULY 1188
EZULY 1189
EZULY 1190
EZULY 1191
EZULY 1192
EZULY 1193
EZULY 1194
EZULY 1195
EZULY 1196
EZULY 1197
EZULY 1198
EZULY 1199
EZULY 1200

Cadre : On considère $d \in \mathbb{N}^*$

I- Espace de Schwartz et distributions tempérées

1° Espace de Schwartz

Déf 1: L'espace $S = S(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions φ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que:
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha, \beta} > 0 \quad |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Rmq 2: On peut définir S par:
 $\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ telle que } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \}$

Ex 3: * $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S$

* $\varphi(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^d$ appartient à S

* plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$ la fonction sur $\mathbb{R}^d, \varphi(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à S .

Prop 4: Muni des semi-normes $p_{\alpha, \beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$
 $S(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrisable et complet. ADMIS

Prop 5: * S est stable par dérivation et multiplication par un polynôme

* Le produit de deux éléments de S appartient à S

* $\forall 1 \leq p \leq +\infty \quad S(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$

2° Distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^d)$

Déf 6: On dit que T est une distribution tempérée, ce qu'on note $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ si T est une forme linéaire sur $S(\mathbb{R}^d)$ et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que
 $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad | \langle T, \varphi \rangle | \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} p_{\alpha, \beta}(\varphi)$

Ex 7: * Toute fonction mesurable et majorée par un polynôme est une distribution tempérée.

* $\forall p(\frac{1}{x}) \in S'$ où $\forall \varphi \in S \quad \langle p(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

* $S_0 \in S'$

Contre-exemple 8: $e^{-x^2} \notin S'(\mathbb{R})$

Prop 9: * $x_i T$ est dans $S'(\mathbb{R}^d)$ si $T \in S'(\mathbb{R}^d)$
 où $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle x_i T, \varphi \rangle := \langle T, x_i \varphi \rangle$

* $\forall 1 \leq p \leq +\infty \quad L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$

Prop 10: Si $T \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors on peut définir une distribution dans $S'(\mathbb{R}^d)$ par la formule:

$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T(x) \varphi(x) dx$

Déf 11: Soient $(T_j)_j$ une suite de S' et $T \in S'$
 On dira que $\lim_{j \rightarrow +\infty} T_j = T$ si $\forall \varphi \in S \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

Ex 12: * On pose $f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[-1/n; +\infty[}(x)$

Alors $f_n \rightarrow \text{vp}(\frac{1}{x})$ dans S'

* On pose $H_n(x) = e^{-x/n} H(x)$ où $H(x) = \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x)$
 alors $H_n \rightarrow H$ dans S'

3° Opérations sur les distributions tempérées

Déf 13: Soit $T \in S'$. Alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est définie par
 $\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad \forall \varphi \in S$

Prop 14: Si $T \in S'$, alors toutes ses dérivées appartiennent à S'

Ex 15: $e^x (\cos(e^x) + i \sin(e^x)) \in S'(\mathbb{R})$

Ex 16: * $(-\ln|x|)' = \text{vp}(\frac{1}{x})$ dans S'

* $H' = S_0$ dans S'

* $(\text{vp}(\frac{1}{x}))' = -\text{Pf}(\frac{1}{x^2})$

ex 15: $e^n \cos(e^n)$ est ds S' mais ~~est~~ \notin de polynôme qui majore $e^x \cos(e^x)$

EZULY 1071
X
EZULY 1072
-
-
X
EZULY 1073
X
EZULY 1074
X
EZULY 1075
X
EZULY 1076
X
EZULY 1077
X
EZULY 1078
X
EZULY 1079
X
EZULY 1080
X
EZULY 1081
X
EZULY 1082
X
EZULY 1083
X
EZULY 1084
X
EZULY 1085
X
EZULY 1086
X
EZULY 1087
X
EZULY 1088
X
EZULY 1089
X
EZULY 1090
X
EZULY 1091
X
EZULY 1092
X
EZULY 1093
X
EZULY 1094
X
EZULY 1095
X
EZULY 1096
X
EZULY 1097
X
EZULY 1098
X
EZULY 1099
X
EZULY 1100
X
EZULY 1101
X
EZULY 1102
X
EZULY 1103
X
EZULY 1104
X
EZULY 1105
X
EZULY 1106
X
EZULY 1107
X
EZULY 1108
X
EZULY 1109
X
EZULY 1110
X
EZULY 1111
X
EZULY 1112
X
EZULY 1113
X
EZULY 1114
X
EZULY 1115
X
EZULY 1116
X
EZULY 1117
X
EZULY 1118
X
EZULY 1119
X
EZULY 1120
X
EZULY 1121
X
EZULY 1122
X
EZULY 1123
X
EZULY 1124
X
EZULY 1125
X
EZULY 1126
X
EZULY 1127
X
EZULY 1128
X
EZULY 1129
X
EZULY 1130
X
EZULY 1131
X
EZULY 1132
X
EZULY 1133
X
EZULY 1134
X
EZULY 1135
X
EZULY 1136
X
EZULY 1137
X
EZULY 1138
X
EZULY 1139
X
EZULY 1140
X
EZULY 1141
X
EZULY 1142
X
EZULY 1143
X
EZULY 1144
X
EZULY 1145
X
EZULY 1146
X
EZULY 1147
X
EZULY 1148
X
EZULY 1149
X
EZULY 1150
X
EZULY 1151
X
EZULY 1152
X
EZULY 1153
X
EZULY 1154
X
EZULY 1155
X
EZULY 1156
X
EZULY 1157
X
EZULY 1158
X
EZULY 1159
X
EZULY 1160
X
EZULY 1161
X
EZULY 1162
X
EZULY 1163
X
EZULY 1164
X
EZULY 1165
X
EZULY 1166
X
EZULY 1167
X
EZULY 1168
X
EZULY 1169
X
EZULY 1170
X
EZULY 1171
X
EZULY 1172
X
EZULY 1173
X
EZULY 1174
X
EZULY 1175
X
EZULY 1176
X
EZULY 1177
X
EZULY 1178
X
EZULY 1179
X
EZULY 1180
X
EZULY 1181
X
EZULY 1182
X
EZULY 1183
X
EZULY 1184
X
EZULY 1185
X
EZULY 1186
X
EZULY 1187
X
EZULY 1188
X
EZULY 1189
X
EZULY 1190
X
EZULY 1191
X
EZULY 1192
X
EZULY 1193
X
EZULY 1194
X
EZULY 1195
X
EZULY 1196
X
EZULY 1197
X
EZULY 1198
X
EZULY 1199
X
EZULY 1200

[BONY103]

Prop 17: Soit f de classe C^1 par morceaux dans \mathbb{R} . On a alors: $f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^n [f(a_{i+}) - f(a_{i-})] \delta_{a_i}$ où f' est la dérivée au sens des distributions tempérées et $\{f'\}$ la fonction continue par morceaux dérivées usuelle en dehors des points a_i .

x Ex 18: $f'(x) = (\mathbb{1}_{[-1;1]}(x))' = 0_+ (f(1^+) - f(1^-)) \delta_1 + (f(-1^+) - f(-1^-)) \delta_{-1} = -\delta_1 + \delta_{-1}$

[ZUJLY 37]

Prop 19: Une distribution tempérée admet des dérivées de tous ordre. Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice et $T \in S'$, $\partial^\alpha T \in S'$ qui est définie par $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in S$

x Prop 20: Si $T_1, T_2 \in S'$, $\partial^\alpha (T_1 + \lambda T_2) = \lambda \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2$

Thm 21: Si $T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T$ dans S' , on a $\partial^\alpha T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha T$ dans S'

Déf 22: Posons $O_M(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0$ $| \partial^\alpha f(x) | \leq C_\alpha (1 + |x|)^k$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

Déf 23: Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$ alors $fT \in S'$ où $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle \forall \varphi \in S$

Prop 24: Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$ alors $\partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T$ où $\alpha \in \mathbb{N}^d$

Ex 25: $x \times \text{vp}(\frac{1}{x}) = 1$ dans S'

II - Transformée de Fourier

1° Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$

Déf 26: Pour $\varphi \in S$, la transformée de Fourier de φ que l'on note $F\varphi$ ou $\hat{\varphi}$, est la fonction sur \mathbb{R}^d définie par $F(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$ où $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d$

[ZUJLY 102]

Rmq 27: Cette définition a bien un sens car $e^{-ix \cdot \xi} \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Ex 28: Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$. Soit $\varphi(x) = e^{-2|x|^2}$ On a $\hat{\varphi}(\xi) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}})^d x e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$

Thm 29: La transformée de Fourier F est une application linéaire bijective de S dans S . Si on pose pour $\varphi \in S$, $\bar{F}\varphi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi$ Alors \bar{F} envoie S dans S et on a $F \circ \bar{F} = \bar{F} \circ F = \text{identité}$

Rmq 30: De plus, F est un homéomorphisme

Prop 31: Pour $\varphi, \psi \in S$, on a:

- * $\int \varphi(x) \psi(x) dx = \int \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi$
- * $\int \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi$
- En particulier, $\int |\varphi(x)|^2 dx = (2\pi)^{-d} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$
- * $\varphi * \psi \in S$ et $F(\varphi * \psi) = \hat{\varphi} \times \hat{\psi}$
- * $\varphi \times \psi = (2\pi)^{-d} \hat{\varphi} * \hat{\psi}$
- * $D_j \hat{\varphi} = i \xi_j \hat{\varphi}$ où $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$
- * $D_j(\hat{\varphi}) = F\{-ix_j \varphi(x)\}$ où $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

2° Transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$

Déf 32: Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T est la distribution tempérée, notée F_T ou \hat{T} définie par $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$

Ex 33: $F\delta_0 = 1$

Prop 34: La transformée de Fourier dans S' coïncide avec la transformée de Fourier dans S si $T \in S$

Théo 35: La transformée de Fourier est une application linéaire de $S'(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même d'inverse $F^{-1} = \bar{F}$

DVPT
1

[ZUJLY 11]

[ZU14] 114]

Prop 36: Pour tout $T \in S'$, on a:

* $FFT = (2\pi)^d \hat{T}$ où $\langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle T, \check{\psi} \rangle$ et $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$

* $F(D_j T) = i \xi_j FT$

* $D_j(FT) = -F(ix_j T)$

[ZU14] 115]

Ex 37: * $F1 = (2\pi)^d \delta_0 = \hat{1}$

[ZU14] 117]

* $vp(\frac{1}{x}) = -i\pi \text{sign}(x)$

-

* $\hat{H} = -i vp(\frac{1}{x}) + \pi \delta$

[ZU14] 114]

Thm 38: Si $T_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} T$ dans S' , alors $\hat{T}_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \hat{T}$ dans S'

X Appl. 39: $vp(\frac{1}{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x+i\epsilon} + i\pi \delta_0$

III - Applications

1° Transformée de Fourier dans L^1 et L^2

[ZU14] 119]

Thm 40: * Si $T \in L^1$, \hat{T} est donnée par la fonction continue $\hat{T}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} T(x) dx$

De plus, \hat{T} tend vers 0 à l'infini.

* Si $T \in L^1$ et $\hat{T} \in L^1$, on a $F\hat{T} = (2\pi)^d \check{T}$

* L'appl. $T \mapsto (2\pi)^{-d/2} \hat{T}$ est une isométrie bijective de L^2 sur lui-même.

[COA] 112]

Appl. 41: Soient I un intervalle de \mathbb{R} et p une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int e^{-ax} p(x) dx < +\infty$ Alors la famille des polynômes orthogonaux associée à p forme une base hilbertienne de $L^2(I, p(x) dx)$

2° Formule sommatoire de Poisson

Pour cette partie, on introduit une nouvelle normalisation de la transformée de Fourier

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$$

Théo 42: Soit $f \in S(\mathbb{R})$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

Appl. 43: $\forall s > 0, \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 / s}$

3° Résolution d'équations aux dérivées partielles

Soit $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ $\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = \delta_0(x) \end{cases}$

La solution de (1) dans S' est

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \times e^{-|x|^2/4t}$$

* $\Delta u = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^d)$ (2)

La solution de (2) dans S' est

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} (2\pi)^{-d} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} i^{|\alpha|} x^\alpha$$

Zuily: éléments de distribution

Bony: COURS d'ANALYSE

Zuily exo: exercices corrigés

Gasquet - Witomski

[600]

272

DVPT

2

[BONY] 18

X

- Comment réécrire la formule sommatoire de Poisson en terme de

distrib:

$$\sum \delta_n = \sum \hat{\delta}_n \quad (\text{avec } n=0)$$

$$\sum f(n) = \sum \langle \delta_n, f \rangle = \langle \sum \delta_n, f \rangle = \langle \sum \delta_n, \hat{f} \rangle = \langle \sum \hat{\delta}_n, f \rangle$$

- Pourquoi on s'intéresse à l'app? fact^o de Jacobi et seul^z en Th des nbs.

- Calculer $\hat{\nu}_p\left(\frac{1}{n}\right)$

vérifier que c'est bien un distrib.

$$\langle \nu_p\left(\frac{1}{n}\right) | \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|n| > \varepsilon} \frac{\varphi(n)}{n} dx.$$

- Calculer \hat{H} .

Développement: Formule sommatoire de Poisson et application

Justine VELLY
 Joséphine BOULANGER

28 mars 2016

Référence : Gourdon analyse, page 272

On introduit une nouvelle normalisation de la transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt} dt$

Théorème 1

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
 Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi xn}$

Application : $\forall s > 0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Etape 1 : Une idée pour construire des fonctions périodiques sur \mathbb{R} à partir d'une fonction non périodique f consiste à considérer la série $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$

On veut montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R} .

Ainsi, $\forall K > 0 \forall x \in [-K, K], |x+n| \geq n - |x| \geq n - K$

Comme $f \in \mathcal{S}, f(x) = o_{|x| \rightarrow +\infty}(\frac{1}{x^2})$

On a alors $\exists M > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1, |f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$

On a $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(n-K)^2}$ indpt de x et terme général d'une série convergente

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R} .

Notons $F = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ sa limite simple.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R} , donc uniformément sur tout compact de \mathbb{R} .

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions car on a :

- la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge simplement vers F

- la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge uniformément

pas à dériver
 l'énoncé

- les fonctions $f(\cdot + n)$ sont de classe C^1

Ainsi, F est de classe C^1 sur tout compact de \mathbb{R} , donc sur tout \mathbb{R} par continuité.

Etape 2 :

De plus, F est 1-périodique car si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^N f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$
donc en faisant $N \rightarrow +\infty$, on en déduit $F(x+1) = F(x)$

Etape 3 : On calcule les coefficients de Fourier de F , pour $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2i\pi n t} \underbrace{e^{2i\pi n k}}_{=1} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt = \hat{f}(n) \end{aligned}$$

Enfin, comme F est C^1 , la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2i\pi n x}$ converge normalement sur \mathbb{R} et F est

somme de sa série de Fourier.

On a donc $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2i\pi n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ ■

Application : $\forall s > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Soit $\alpha > 0$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ qui vérifie les hypothèses du théorème.

On calcule, si $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} dt$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(u=\sqrt{\alpha}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(u + \frac{i\pi n}{\sqrt{\alpha}})^2} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} \end{aligned}$$

On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on prend $\alpha = \frac{\pi}{s}$, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$ ■

1. on peut inverser car la série converge normalement.

Développement: Théorème d'isomorphisme de Fourier

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

22 mars 2016

Référence : Zuily-Queffelec, p329

Définition 1

Pour $u \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de u , notée \hat{u} ou $\mathcal{F}u$, est la fonction définie sur \mathbb{R} , par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

Théorème 1

La transformée de Fourier \mathcal{F} est une application linéaire bijective de \mathcal{S} sur \mathcal{S} . Si on pose, pour $v \in \mathcal{S}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi$$

alors, $\overline{\mathcal{F}}$ envoie \mathcal{S} dans \mathcal{S} et on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \text{identité de } \mathcal{S}$, i.e $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration : Tout d'abord, \hat{f} existe car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

— \hat{f} est C^∞ :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-itx} f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii)

$$\forall q \in \mathbb{N}, \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^q [e^{-itx} f(x)] \right| = |x|^q |f(x)|$$

Or, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\exists C \geq 0$ tel que

$$|(x + x^{q+2})f(x)| \leq C$$

Donc,

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^q [e^{-itx} f(x)] \right| \leq \frac{C}{(1+x^2)} \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc, $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^q e^{-itx} f(x) dx$$

— $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: Nous allons montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) dx$$

ce qui permettra de conclure, puisqu'alors, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t^p \hat{f}^{(q)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)| dx = C_{p,q} < +\infty \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

Pour $p = 0$, le résultat est vrai, puisque $x^q f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On suppose le résultat vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{N}, t^p \hat{f}^{(q)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_{p,q}(x) e^{-itx} dx \\ &\stackrel{IPP}{=} \underbrace{\left[g_{p,q}(x) \frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x) dx \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} t^{p+1} \hat{f}^{(q)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g'_{p,q}(x)}{i} e^{-itx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{p+1,q}(x) e^{-itx} dx \end{aligned}$$

et

$$g_{p+1,q} = \frac{g'_{p,q}}{i} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

ce qui conclut la récurrence.

- Montrons maintenant que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt$$

Pour prouver que $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$, il nous faut considérer l'intégrale $\int e^{ixt} \left(\int e^{-iyt} f(y) dy \right) dt$, et on a envie d'échanger l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini. Mais, la fonction $(y, t) \mapsto e^{ixt} e^{-iyt} f(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. C'est pourquoi on introduit le facteur $e^{-\varepsilon t^2}$.

Comme,

$$|e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t)| \leq |\hat{f}(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

on a d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) dy \right) dt$$

Et

$$\int_{br,2} |e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} e^{-ity} f(y)| dy dt \stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right) < +\infty$$

Donc, $(y, t) \mapsto e^{ixt} e^{-iyt} f(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Fubini, on peut échanger l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{br} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{br} f(y) \underbrace{\left(\int_{br} e^{-it(y-x)} e^{-\varepsilon t^2} dt \right)}_{= \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-(y-x)^2/4\varepsilon} \text{ (transformée de Fourier d'une Gaussienne)}} dy \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\varepsilon t^2} \hat{f}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-(y-x)^2/4\varepsilon} dy \\ &\stackrel{u=\frac{y-x}{2\sqrt{\varepsilon}}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\varepsilon}u) e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\varepsilon}u) e^{-u^2} du$$

Or,

$$|f(x + 2\sqrt{\varepsilon}u) e^{-u^2}| \leq \|g\|_{\infty} e^{-u^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc, par le théorème de convergence dominée, et par continuité de f ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \right) f(x) = f(x)$$

\mathcal{F} est donc un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 1

— En se donnant un peu de peine sur les notations (mais pas sur la forme), on généralise facilement ce résultat à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.