255

Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Notation : $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}_K(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact inclus dans K compact $\subset \Omega$.

I Distributions : définitions et premières propriétés

1) Définition et convergence

[HL] Déf 1 : Une distribution sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.

Prop 2 : Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. T est une distribution ssi pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists m \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ t.q. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi^{(m)}\|$.

Déf 3 : Une distribution T sur Ω est dite d'ordre fini s'il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall K$ compact de Ω, $\exists C > 0$ t.q. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi^{(m)}\|$. L'ordre de T est alors le plus petit entier m pour lequel cette propriété est satisfaite.

[BON] Ex 4 : • On peut associer à $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ une distribution, notée encore f : $\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$.

• La distribution de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$.

[ZUI] • À $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$ on associe la distribution $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ définie par $\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.

[BON] Déf 5 : On dit qu'une suite (u_j) de distributions converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers u si, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a $\lim_{j \to +\infty} \langle u_j, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$.

2) Multiplication

Déf 6 : Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in C^\infty(\Omega)$. On définit la distribution αT sur Ω en posant $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle$. [HL]

Prop 7 : $\forall S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\exists T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $xT = S$ et si $xT_0 = S$, alors l'ensemble des solutions de $xT = S$ est égal à $\{T_0 + C\delta,\ C \in \mathbb{C}\}$.

3) Dérivation au sens des distributions

Déf 8 : Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On note $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution définie par $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$. [BON]

Plus généralement, $\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle$.

Thm 9 : Si une suite $(u_j) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers u, alors $(\partial^\alpha u_j)$ converge vers $\partial^\alpha u$.

Rem 10 : La dérivation devient alors une opération toujours définie et continue.

Ex 11 : • Les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction de Heaviside H définie par $H(x) = 1,\ x > 0$; $= 0$ sinon sont : $\langle H', \varphi\rangle = \varphi(0)$ et $\langle H'', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$.

• Les dérivées de la mesure de Dirac en a sont données par : $\forall p \in \mathbb{N}^n$, $\langle \partial^p(\delta_a), \varphi\rangle = (-1)^{|p|}\partial^p\varphi(a)$. [HL]

Prop 12 : (Formule de Leibniz) Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ et $p \in \mathbb{N}^n$, $\partial^p(\alpha T) = \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} \partial^{p-q}\alpha \times \partial^q T$. [HL]

II Distributions et espaces de Schwartz [ZUI]

1) L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Déf 13 : L'espace $\mathcal{S}$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists C_{\alpha,\beta} > 0$; $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ex 14 : $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$

Prop 15 : (i) $\mathcal{S}$ est stable par dérivation et multiplication par les polynômes.

(ii) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}$.

(iii) $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Déf 16 : (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$)

$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int e^{-i(x,\xi)} u(x)\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Thm 17 : $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

DEV 1

Thm 18 (Formule d'inversion de Fourier)

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées

Déf 19 : $\mathcal{S}'$ est l'ev des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi T linéaire $\in \mathcal{S}'$ ssi $\exists k, l \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Prop 20 : (i) $T \mapsto T_{|C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$ est injective de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{D}'$

(ii) Si $T \in \mathcal{S}'$, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ et $x_i T$ sont dans $\mathcal{S}'$.

(iii) $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

(iv) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est mesurable tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq |P(x)|$, P polynôme, on a $f \in \mathcal{S}'$.

Thm /Déf 21 : Si $T \in \mathcal{S}'$, la transformée de Fourier de T, notée $\hat{T}$, est la forme linéaire sur $\mathcal{S}$ définie par $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle$ et $\hat{T} \in \mathcal{S}'$.

Thm 22 : La transformation de Fourier est une application linéaire bijective et bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

Ex 23 : • $\hat{\delta}_0 = 1$

• $\hat{1} = (2\pi)^n \delta_0$.

Prop 24 : (i) la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}$ si $T \in \mathcal{S}$.

(ii) $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n \check{T}$ où $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

(iii) $\widehat{\frac{1}{i}\frac{\partial T}{\partial x_j}} = \xi_j \hat{T}$, $\widehat{x_j T} = -\frac{1}{i}\hat{T}$.

III Distributions et applications

1) EDO à coefficients constants dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Thm 25 : On suppose que Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\partial_j T = 0$. Alors $\exists C \in \mathbb{C}$ telle que $T = C$. [HL]

Thm 26 : On suppose que Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \Omega$. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $T' = f$.

(ii) $\exists C \in \mathbb{C}$ t.q. $T = F$ où $F(x) = C + \int_\alpha^x f(t)\,dt$ est une primitive de f au sens des distributions.

Déf 27 : Soit $P(X) = \sum_{|p| \leq m} a_p X^p$. L'application linéaire $P(D) = \sum_{|p| \leq m} a_p \partial^p$ est appelée opérateur différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$. On appelle solution fondamentale de $P(D)$ toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(D)E = \delta_0$.

Thm 28 : Soit $P(X)=\sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ avec $m\in\mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{C}$, et $a_m\neq 0$. Soit ϕ la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\sum_{j=0}^{m} a_j\phi^{(j)}=0$ telle que $\forall j\leq m-2$, $\phi^{(j)}(0)=0$ et $\phi^{(m-1)}(0)=1$. Alors $E=\frac{1}{a_m}H\phi$ est solution fondamentale de $P(D)$, où H est la fonction de Heaviside.

[CB] **Thm 29** : Une équation différentielle linéaire à coefficients $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ n'a pas d'autres solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que ses solutions habituelles si le coefficient d'ordre m ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$.

Rem 30 : Le résultat n'est plus vrai pour les EDP.

2) Formule des sauts

[BON] **Thm 31** : Soit f C^1 par morceaux dans $]a,b[$ sur une subdivision $a_0<\dots<a_N$. On a alors
$$f'=\{f'\}+\sum_{i=1}^{N-1}\big(f(a_i+0)-f(a_i-0)\big)\delta_{a_i}$$
où f' est la dérivée au sens des distributions et $\{f'\}$ la fonction continue par morceaux dérivée usuelle en dehors des points a_i.

Ex 32 : Dérivée de $\log|x|$: $\frac{d}{dx}\log|x| = vp\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Espaces de Sobolev

[BRE] **Def 33** : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On définit $H^1(I)=\{u\in L^2(I)$ t.q. $\exists u'\in L^2(I)$:
$$\int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi\in C_c^1(I)\}$$

Thm 34 : (i) L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire $(f|g)_{H^1}=(f|g)_{L^2}+(f'|g')_{L^2}$ est un espace de Hilbert. (DEV 2)

(ii) H^1 s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ si I est borné.

Thm 35 : Soit $u\in L^2(I)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes : [BRE]

(i) $u\in H^1(I)$

(ii) $\exists C$ constante t.q. $\forall\varphi\in C_c^\infty(I)$, $\left|\int_I u\varphi'\right|\leq C\|\varphi\|_{L^2}$

(iii) $\exists C$ constante t.q. $\forall\omega\subset\subset I$, ω ouvert, et $\forall h\in\mathbb{R}$ t.q. $|h|<\mathrm{dist}(\omega, I^c)$, on a :
$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)}\leq C|h|.$$

Prop 36 : Si $I=]a,b[$ avec $-\infty<a<b<+\infty$, alors $C^1(\bar{I})$ est un sous-espace dense de $H^1(I)$.

RÉFÉRENCES :

[HL] : Hirsh-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle

[BON] : Bony, Cours d'analyse

[ZUI] : Zuily, Éléments de distributions et d'EDP

[CB] : Choquet-Bruhat,

[BRE] : Brezis, Analyse Fonctionnelle