255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions

Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$K \subset\subset \Omega$. $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,/\, \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$.

On munit $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de la famille de semi-normes $p_{K,m}(\varphi) := \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|$

Si (K_n) est une suite exhaustive de compacts de Ω, on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie limite inductive des $\mathcal{D}_{K_n}$.

I - Introduction aux distributions

1) Premières définitions

Déf 1. On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω (= dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$).

Notation : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$

Ex 2 :
- La mesure de Dirac en un point $a \in \mathbb{R}^n$: $\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$
- DEV1 La valeur principale de $\frac{1}{x}$: $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
- Les fonctions L^1_{loc} définissent des distributions

Prop 3 : Une distribution est une forme linéaire T telle que
$\forall K \subset\subset \Omega$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists C \geq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot p_{K,m}(\varphi)$

Déf 4 :
- On dit que T est d'ordre $\leq m$ si l'entier m de la prop ci-dessus ne dépend pas du compact K de Ω.
- On dit que T est d'ordre exactement m si T est d'ordre $\leq m$ mais pas $\leq m-1$

Ex 5 :
- Les distributions d'ordre 0 sont appelées mesures de Radon
- $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.

Déf 6 : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans ω si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.
Le support de T, noté $\operatorname{supp} T$ est le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

Ex 7 : $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$

Déf 8 : (Convergence) Une suite (T_j) de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

2) Multiplication

Déf 9 : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On définit le produit fT par :
$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Rque. Cela définit encore une distribution car $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ex 10 : $x \cdot vp(\frac{1}{x}) = 1$

Application 11 L'équation $fT = 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, $T \in \mathcal{D}'$ n'entraîne pas toujours $T = 0$. Par exemple, $xT = 0$ a pour solution $T = c\,\delta$.

Prop 12 : $\operatorname{supp}(fT) \subset \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(T)$.

II - Dérivation au sens des distributions

1) Définition

Déf 13. On définit la dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par : $\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle := -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ex 14 :
- La fonction de Heaviside $H := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$, $H' = \delta$
- $|\cdot|' = \operatorname{sgn}$

Prop 15 : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

Ex 16 : Dérivées d'un Dirac : $\langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a)$

Thm 17 : Toute distribution de support un singleton $\{a\}$ est combinaison linéaire finie de dérivées de δ_a.

2) Primitives de distributions

Thm 18 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Soit $u \in \mathcal{D}'(I)$.
Alors $\exists v \in \mathcal{D}'(I)$ tq $v' = u$.
En outre, si $w' = u$ avec $w \in \mathcal{D}'(I)$ alors $w = v + \text{cte}$.

Ex 19 : $(\ln|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Dérivée d'un produit

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Un calcul simple donne :

Prop 20 : $\frac{\partial}{\partial x_i}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_i} T + f \frac{\partial T}{\partial x_i}$

Prop 21 : (Formule de Leibniz). Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$.

$$D^\beta(fT) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^{\beta-\alpha} f \cdot D^\alpha T \quad , \text{ où } \binom{\beta}{\alpha} := \prod_{i=1}^{n} \binom{\beta_i}{\alpha_i}$$

4) Dérivation et convolution

a) Convolution d'une distribution par une fonction

Déf 22 : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(T * \varphi)(x) := \langle T, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$

Prop 23. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$

b) Convolution de deux distributions

Déf 24 : Si $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec T ou S de support compact, on définit
$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$

Ex 25 :
- $\delta * T = T \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ($\delta$ est l'élément neutre pour la convolution)
- $\partial^\alpha \delta * T = \partial^\alpha T$

Prop 26 :
- La convolution est commutative
- La convolution n'est pas associative

Contre exemple 27 : $1 * (\delta' * H) = 1$ mais $(1 * \delta') * H = 0$

Rque : La convolution de n distributions dont toutes, sauf une au plus, sont à support compact est associative.

Prop 28 : Dans les cas où l'associativité est vérifiée, on a
$\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha \delta * (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$

III – Distributions et espaces de Schwartz

1) Espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Déf 29 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) / \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Dans la suite nous noterons $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
La topologie sur $\mathcal{S}$ est définie par la famille dénombrable de semi-normes $p_{\alpha,\beta}(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|$.

Rque : C'est une topologie métrisable, qui fait de $\mathcal{S}$ un espace métrique complet.

Ex 30 :
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ (on a même que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}$).
- $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$

Prop 31 : $\mathcal{S}$ est stable par multiplication, dérivation, convolution.

Thm 32 : $\forall p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$

Déf 33 : (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$). Soit $u \in \mathcal{S}$.
$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)\, dx \quad , \ \xi \in \mathbb{R}^n$

Thm 34. $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, d'inverse $\bar{\mathcal{F}} v(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} v(\xi)\, d\xi \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ v \in \mathcal{S}$.

Prop 35 : Pour $u, v \in \mathcal{S}$, on a :

(i) $\int \hat{u} v = \int u \hat{v}$

(ii) $u * v \in \mathcal{S}$ et $\widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{u} \cdot \hat{v}$

(iii) $\widehat{u \cdot v} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, \hat{u} * \hat{v}$

(iv) $\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} u} = i \xi_j \hat{u}$

(v) $\widehat{x_j u} = i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{u}$

2) Espace des distributions tempérées : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Déf 36 On appelle distribution tempérée toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des distributions tempérées.

Prop 37 . Une distribution T est tempérée ssi c'est une forme linéaire de $\mathcal{S}$ telle que. $\exists C > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \cdot P_{\alpha,\beta}(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

. Une distribution T est tempérée ssi c'est une dérivée d'une fonction continue à croissance lente, c'est-à-dire du produit d'un polynôme par une fonction continue bornée.

Déf 38 : (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$) Soit $T \in \mathcal{S}'$

On définit $\mathcal{F}T$ par :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

De même on définit $\overline{\mathcal{F}}T$ par :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Ex 39 :
- $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathbb{1}$
- $\mathcal{F}\mathbb{1} = (2\pi)^{n/2} \delta$

Rque. $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{S}'$, avec $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T$ pour tout $T \in \mathcal{S}'$

Prop 40 : Soient $T, S \in \mathcal{S}'$.

(i) Si T ou S de support compact, alors $T * S \in \mathcal{S}'$ et $\mathcal{F}(T * S) = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}T\, \mathcal{F}S$

(ii) $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j} T) = i \xi_j \mathcal{F}T$

(iii) $\mathcal{F}(x_j T) = i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}T$

IV - Applications

1) Equations aux dérivées partielles

Déf 41 : Soit $P(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$ de degré $m \in \mathbb{N}$.

L'application linéaire $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ est appelée opérateur différentiel linéaire de coefficients constants d'ordre m sur $\mathbb{R}^d$

Ex 42 : Si $P = X_1^2 + \dots + X_d^2$, alors $P(D) = \Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

Déf 43. Si $P(D)$ est un tel opérateur, on appelle solution fondamentale de $P(D)$ toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $P(D)E = \delta$.

Application 44. • Solution élémentaire du Laplacien $\Delta E = \delta$ **DEV2**

• Equation des ondes, chaleur, ..

2) Espaces de Sobolev

Déf 45 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$H^1(I) := \{u \in L^2(I) : \exists g \in L^2(I) \,/ \int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$

Pour $u \in H^1(I)$, on note $u' = g$.

On munit H^1 du produit scalaire $(u,v)_{H^1} := (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$ et de la norme associée $\|u\|_{H^1} := (\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2})^{1/2}$, faisant de H^1 un espace de Hilbert séparable, réflexif.

Déf 46 $H^m(I) := \{u \in L^2(I) : \exists g_1, \dots, g_m \in L^2(I) \,/ \int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, \dots, m\}$.

On note $D^j u$ les g_j.

Produit scalaire : $(u,v)_{H^m} := (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$.

- Zuily, <u>éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles</u>. ← essentiel, $\boxed{\text{DEV1}}$
- Zuily, <u>distributions et équations aux dérivées partielles, exercices corrigés</u> ← exos + très bons résumés de chaque chapitre
- Choquet-Bruhat, <u>distributions, théorie et problèmes</u>. ← $\boxed{\text{DEV2}}$, et beaucoup d'autres développements possibles
- Hirsch-Lacombe, <u>éléments d'analyse fonctionnelle</u> ← distributions, solutions fondamentales opérateur différentiel, mais pas de distributions tempérées dans ce livre
- Brezis, <u>analyse fonctionnelle</u>. ← pour Sobolev uniquement.
