Espace de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

I) Espace de Schwartz et distributions tempérées

1) Espace de Schwartz

déf : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui sont à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées, ie $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n \quad \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty < +\infty$

exples : $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$, $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, en revanche les fractions rationnelles (non nulles) ne sont pas dans $\mathcal{S}$.

On munit $\mathcal{S}$ des semi-normes $N_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta| \le p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Prop : $\mathcal{S}$ est un ev métrisable et complet.

Prop : 1) $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans $\mathcal{S}$, ie $\forall \varphi \in \mathcal{S} \ \exists (\varphi_n)_n \in (\mathcal{C}_c^\infty)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall p \in \mathbb{N} \quad N_p(\varphi - \varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) $\mathcal{S}$ est dense dans L^p pour $1 \le p < +\infty$

déf : $O_M(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \exists N \in \mathbb{N} \ \exists C>0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x}(x)\right| \le C(1+|x|)^N$

Prop : 1) $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par $f \in O_M$

2) $\mathcal{S}$ est stable par dérivation

3) $\mathcal{S}$ est stable par convolution

Prop : la dérivation et la multiplication par un polynôme sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

2) Distributions tempérées

déf : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}$. En d'autres termes, c'est l'ensemble des formes linéaires T sur $\mathcal{S}$ tq $\exists p \in \mathbb{N} \ \exists C \ge 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad |\langle T,\varphi\rangle| \le C N_p(\varphi)$

exples : $\mathcal{S} \subset L^p \subset \mathcal{S}'$, $L^1_{loc} \not\subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{C}^\infty \not\subset \mathcal{S}'$

$O_M \subset \mathcal{S}'$, $\delta \in \mathcal{S}'$, $vp(1/x) \in \mathcal{S}'$ où $vp(1/x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$

déf (convergence des distributions)

On dit que $(T_n)_n \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{S}'$ si $\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle T_n,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T,\varphi\rangle$

déf (support) On dit que T est nulle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ si $\langle T,\varphi\rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset U$

Le support de T est alors le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

exples : $\mathrm{supp}\,\delta_0 = \{0\}$, $\mathrm{supp}\, vp(1/x) = \mathbb{R}$

déf : On note $\mathcal{E}'$ l'espace des distributions tempérées à support compact.

Prop : si $fT = 0$ avec $f \in O_M$ et $T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathrm{supp}(T) \subset Z(f)$.

Prop : Soit $T \in \mathcal{S}'$. Si $\mathrm{supp}\,T = \{0\}$ alors T est une combinaison linéaire de dérivées de δ_0. DVI

3) Opérations sur les distributions tempérées

a) Si $\varphi \in O_M$ et $T \in \mathcal{S}'$, on définit $\varphi T \in \mathcal{S}'$ par $\langle \varphi T, \psi\rangle := \langle T, \varphi\psi\rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$

exple : si $T \in \mathcal{S}'$ vérifie $x^2 T = 1$, alors T est de la forme $T = vp(1/x) + \lambda\delta_0 + \mu\delta_0'$

b) On ne peut pas définir un produit associatif et commutatif sur $\mathcal{S}'$.

c) Dérivation : on définit $\partial_i T$ par $\langle \partial_i T,\varphi\rangle = -\langle T, \partial_i \varphi\rangle$.

Plus généralement, $\langle \partial^\alpha T,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^\alpha\varphi\rangle$.

Prop : si $(T_m)_m \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{S}'$, alors $\partial^\alpha T_m$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'$.

exples de dérivées : 1) $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, $H' = \delta_0$, $H'' = -\delta_0'$

2) $x \mapsto \ln|x|$ est tempérée, sa dérivée est $vp(1/x)$

3) $|\cdot|' = \mathrm{sgn}$, $\quad |\cdot|'' = 2\delta_0$

4) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $T' = 0$ ssi T est constante

Prop : (règle de Leibniz) si $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in O_M$ alors
$$\partial^\alpha(Tf) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}(\partial^\beta f)(\partial^\gamma T)$$

Prop : (formule des sauts en dimension 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(]a,b[)$ et $a_1 < \dots < a_N$ les points de discontinuité alors
$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N}\left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right]\delta_{a_i}$$
où $\{f'\}$ est la dérivée classique

d) Convolution

- si $T \in \mathcal{E}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, $(T*\varphi)(x) := \langle T, y \mapsto \varphi(x-y)\rangle$
  $T*\varphi \in \mathcal{S}$ et $\partial^\alpha(T*\varphi) = (\partial^\alpha T)*\varphi = T*(\partial^\alpha\varphi)$
  et $\forall p\ \exists q, C$ tq $N_p(T*\varphi) \leq N_q(\varphi)$
- si $T \in \mathcal{E}'$ et $S \in \mathcal{S}'$, $\langle S*T, \varphi\rangle := \langle S, T*\varphi\rangle$
  et $S*T \in \mathcal{S}'$
- si $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, $T*\varphi \in \mathcal{S}'$
- δ_0 est le neutre de $*$ dans $\mathcal{S}'$
- $*$ est commutatif

II) Transformation de Fourier

1) Transformation de Fourier de L^1

déf : soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}f$) définie par :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

Prop : $\hat{f}$ est continue, $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\|\xi\| \to +\infty]{} 0$, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Th (inversion de Fourier) Soit $f \in L^1$ tq $\hat{f} \in L^1$, alors $f = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$ où $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx$

Remarque : on voit que pour que $\hat{f} \in L^1$, il faut que f soit continue et tende vers 0 à l'infini

2) Transformation de Fourier de $\mathcal{S}$

Th (inversion de Fourier) $\mathcal{S}$ est stable par $\mathcal{F}$ et $\forall p \in \mathbb{N}\ \exists C_p \geq 0$ tq $N_p(\hat{\varphi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\varphi)$, i.e. $\mathcal{F}$ est continue. $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$

3) Transformation de Fourier de $\mathcal{S}'$

Si $f \in L^1 \subset \mathcal{S}'$, on a $\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle$ par le théorème de Fubini. Il est donc naturel de poser la définition suivante :

déf : soit $T \in \mathcal{S}'$. On définit $\hat{T}$ par :
$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle.$$
On vérifie que $\hat{T} \in \mathcal{S}'$:

DV

$|\langle \hat{T}, \varphi\rangle| = |\langle T, \hat{\varphi}\rangle| \leq C N_p(\hat{\varphi}) \leq C' N_{p+m+1}(\varphi)$

<u>Th</u> (<u>inversion de Fourier</u>) :
$\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'$ d'inverse
$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-m}\overline{\mathcal{F}}$.

<u>Prop</u> : si $T_m \to T$ dans $\mathcal{S}'$ alors $\hat{T}_m \to \hat{T}$ dans $\mathcal{S}'$.

<u>Prop</u> : si $T \in \mathcal{E}'$, $\hat{T} \in \mathcal{E}^\infty$ et $\hat{T}(\xi) = \langle T, e^{-ix.\xi}\rangle$

<u>Quelques propriétés</u> :

- $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$ $\forall (T,S) \in \mathcal{E}' \times \mathcal{S}'$ ou $L^1 \times L^1$
- $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}T$ si $T \in \mathcal{S}'$
- $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ia.\xi}\mathcal{F}T$
- $\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}T$ ($\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini)

<u>exples</u> : $\hat{\delta}_0 = 1$, $\hat{\delta}_a = e^{-iax}$, $\hat{1} = (2\pi)^m \delta_0$

$\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^m i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta$, $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha$

- $\mathcal{F}(\varphi T) = (2\pi)^{-m}\hat{\varphi} * \hat{T}$ si $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in O_M$.

<u>Prop</u> : la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne (à coefficient multiplicatif près)

4) Transformation de Fourier de L^2

<u>Th</u> : l'application $u \mapsto (2\pi)^{-m/2}\mathcal{F}u$ est une isométrie bijective de L^2 dans L^2 d'inverse $(2\pi)^{-m/2}\overline{\mathcal{F}}$.

III) Applications

1) Résolution de l'équation de la chaleur

(1) $(\partial_t - \Delta)\phi = 0$, $\phi(0,\cdot) = \phi_0$ (dimension 1)

<u>Méthode de résolution</u> : $\mathcal{F}$ transforme (1) en une EDO dont la solution est $\hat{\phi}(t,\xi) = e^{-t\xi^2}\hat{\phi}_0(\xi)$. On cherche ensuite K tel que $\hat{K} = e^{-t\xi^2}$. On a alors $\hat{\phi} = \hat{K}\hat{\phi}_0 = \widehat{K * \phi_0}$ puis $\phi = K * \phi_0$.

<u>Remarques</u> :

i) on peut aussi déterminer K en résolvant (1) avec la condition initiale δ_0.
On trouve $K(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\xi^2/4t} H(t)$.

ii) irréversibilité et effet régularisant de l'équation, propagation à vitesse infinie.

2) Espaces de Sobolev et exemple

<u>déf</u> : soit $s \in \mathbb{R}$, on dit que $\phi \in \mathcal{S}'$ est dans $\mathcal{H}^s$ si $\hat{\phi} \in L_{1\,loc}$ et si $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2$

Les espaces de Sobolev permettent de mesurer la régularité. <u>Exemple</u> : pour $f \in \mathcal{S}'$ et $\lambda > 0$, l'équation $(\Delta - \lambda)\phi = f$ admet une unique solution tempérée, $\phi = (2\pi)^{-m}\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{-1}{|\xi|^2+\lambda}\mathcal{F}f\right)$.

<u>Prop</u> : si $f \in H^s$ alors $\phi \in H^{s+2}$.

<u>Prop</u> : $L^1 \subset H^s$ et $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -m/2$

$\mathcal{S} \subset H^s$ $\forall s$

Références

Cours d'analyse, J-M Bony

Éléments de distributions et d'EDP, C. Zuily

Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Quentin Garchery

Référence : Cours d'Analyse, Théorie des Distributions et Analyse de Fourier, Jean-Michel Bony, p. 117 et p.164.

1 Distributions à support réduit à un point

Théorème 1. *Les distributions dont le support est réduit à un point sont exactement les combinaisons linéaires de dérivées de masses de Dirac en ce point :* $\forall u \in \mathbb{D}'(\mathbf{R})$, *Supp(u)*$= \{a\}, u = \sum_{\alpha \leq p} c_\alpha \partial^\alpha \delta_a$.

On aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit u une distribution à support compact. Alors u est d'ordre fini p et pour tout voisinage* $\mathbf{K}$ *compact de Supp(u),*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathbf{D}, | < u, \phi > | \leq C \sup_{\alpha \leq p, x \in \mathbf{K}} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Démonstration. On se donne un voisinage $\mathbf{K}$ compact de $Supp(u)$. On peut trouver $f \in \mathbf{C}^\infty$ à support dans $\mathbf{K}$ et égale à 1 au voisinage de $Supp(u)$. Par définition du support, on trouve $< u, \phi > = < u, f\phi >$. u étant une distribution, il existe un plus petit entier p tel que

$$\exists C_1, \forall \psi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{K}), | < u, \psi > | \leq C_1 \sup_{\alpha \leq p} |\partial^\alpha \psi|$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathbf{C}_0^\infty, | < u, \phi > | &\leq C_1 \sup_{\alpha \leq p} |\partial^\alpha (f\phi)| \\ &\leq C_1 \sup_{\alpha \leq p} | \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} \phi | \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \phi \in \mathbf{C}_0^\infty, | < u, \phi > | \leq C_2 \sup_{\alpha \leq p} |\partial^\alpha \phi|$$

avec $C_2 = C_1 \sup_{\alpha\leq p} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mid \partial^\beta f \mid$.
Finalement on a que u est d'ordre inférieur à p et on a égalité par minimalité de p.

□

Démonstration. Montrons d'abord que toute distribution à support compact d'ordre p est nulle pour chaque fonction test dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à p sont nulles sur Supp(u).
Soit u une telle distribution, on note $\mathbf{K}$ sont support et $\mathbf{K}_\rho = \mathbf{K} + \overline{\mathbf{B}(0,\rho)}$. On pose aussi g_ϵ la fonction caractéristique de $\mathbf{K}_{2\epsilon}$ et on prend f_ϵ des approximations de l'unité à support dans $[-\epsilon, \epsilon]$. La fonction $\psi_\epsilon = g_\epsilon * f_\epsilon$ (convolution) est de classe $\mathbf{C}^\infty$, comprise entre 0 et 1, à support dans $\mathbf{K}_{3\epsilon}$ et égale à 1 sur $\mathbf{K}_\epsilon$. On a : $\partial^\alpha\psi_\epsilon(x) = \int g_\epsilon(x-y)\partial^\alpha f_\epsilon(y)dy$. Or $\partial^\alpha f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n-\alpha}(\partial^\alpha f)(\frac{x}{\epsilon})$, ce qui donne $\|\partial^\alpha f_\epsilon\|_{\mathbf{L}^1} = C_\alpha \epsilon^{-\alpha}$ avec $C_\alpha = \|\partial^\alpha f\|_{\mathbf{L}^1}$. Donc

$$\sup |\partial^\alpha \psi_\epsilon(x)| \leq C_\alpha \epsilon^{-\alpha} \tag{1}$$

Soit ϕ une fonction test telle que toute ses dérivées d'ordre inférieur à p soient nulles sur $\mathbf{K}$. Soit $x \in \mathbf{K}_{3\epsilon}$, il existe $x_0 \in \mathbf{K}$ tel que $|x - x_0| \leq 3\epsilon$. On applique en x le développement de Taylor de $\partial^\beta\phi$ en x_0 à l'ordre $p - \beta$:
$|\partial^\beta\phi(x)| \leq \frac{(3\epsilon)^\omega}{\omega!} \sup_{\mathbf{K}} \partial^{p+1}\phi$ avec $\omega = p + 1 - \beta$.
Donc

$$\sup_{x\in\mathbf{K}_{3\epsilon}} |\partial^\beta\phi(x)| \leq C\epsilon^{p+1-\beta} \tag{2}$$

On utilise la proposition :

$$\begin{aligned} | < u, \phi > | &= | < u, \phi\psi_\epsilon > | \\ &\leq C \sup_{\alpha\leq p, x\in\mathbf{K}_{3\epsilon}} |\partial^\alpha(\phi\psi_\epsilon)| \end{aligned}$$

Or $|\partial^\alpha(\phi\psi_\epsilon)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C\epsilon^{p+1-\beta} C_{\alpha-\beta}\epsilon^{-\alpha+\beta}$ d'après (1) et (2). Donc pour tout ϵ, $| < u, \phi > | \leq C'\epsilon$, c'est-à-dire $< u, \phi >= 0$.

Soit maintenant $u \in \mathbf{D}'(\mathbb{R})$, $Supp(u) = \{a\}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a = 0$. Soit ψ une fonction test égale 1 au voisinage de l'origine et ϕ une fonction test quelconque. On peut écrire

$$\phi(x) = \sum_{\alpha\leq p} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha\phi(0)\psi(x) + r(x)$$

On montre, par récurrence sur n que $\forall n \leq p, \partial^n r(0) = 0$. Donc $< u, r >= 0$. Cela nous donne, en posant $b_\alpha =< u, \psi(x)\frac{x^\alpha}{\alpha!} >$:

$$< u, \phi >= \sum_{\alpha \leq p} b_\alpha \partial^\alpha \phi(0)$$

c'est-à-dire :

$$u = \sum_{\alpha \leq p} b_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

□

2 Inversion de Fourier

2.1 Dans $\mathbf{L}_1$

Soit F la transformée de Fourier, pour $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$F(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx$$

On définit aussi $\overline{F}$ sur $\mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \overline{F}(f)(\xi) = F(f)(-\xi)$$

Lemme 1. $F(x \mapsto e^{-a|x|^2})(\xi) = (\frac{\pi}{a})^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a}$

Théorème 2. *Soit $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ telle que $F(f) \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$(2\pi)^{-n}\overline{F}(F(f)) = f$$

Démonstration. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y).\xi} e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4} f(y)dyd\xi$$

La fonction $(\xi, y) \mapsto e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4} f(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4} F(f)(\xi)d\xi \tag{3}$$

en intégrant d'abord par rapport à y et :

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y).\xi} e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4} d\xi)dy \tag{4}$$

en intégrant d'abord par rapport à ξ.

A l'aide du théorème de Lebesgue pour $\epsilon \longrightarrow 0$, (3) devient :

$$I_\epsilon(x) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} (2\pi)^{-n}\overline{F}(F(f))$$

Il reste à montrer que $I_\epsilon(x) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} f(x)$. Pour cela on va interpréter (4) comme un produit de convolution.
Posons

$$\begin{aligned} G_\epsilon(z) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.\xi} e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} F(\xi \mapsto e^{-\epsilon^2|\xi|^2/4})(z) \end{aligned}$$

. On obtient $I_\epsilon(x) = \int G_\epsilon(y-x) f(y) dy$.

On applique le lemme avec $a = \epsilon^2/4$:

$$\begin{aligned} G_\epsilon(z) &= (2\pi)^{-n}(\frac{4\pi}{\epsilon^2})^{n/2} e^{-|z|^2/\epsilon^2} \\ &= \pi^{-n/2}\epsilon^{-n} e^{-|z|^2/\epsilon^2} \\ &= \epsilon^{-n} G_1(z/\epsilon) \end{aligned}$$

avec $G_1(z) = \pi^{-n/2} e^{-|z|^2}$. G_1 est est une fonction positive, d'intégrale 1 donc G_ϵ est une approximation de l'unité. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^n, (G_\epsilon * f)(x) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} f(x)$ et donc $(2\pi)^{-n}\overline{F}(F(f)) = f$.

2.2 Dans S

□

Théorème 3. *Soit $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi \in \mathbf{L}_1,(\mathbb{R}^n)$ et :*

- $F(\phi) \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\forall p \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R}, N_p(F(\phi)) \leq C N_{p+n+1}(\phi)$
- $(2\pi)^{-n}\overline{F}(F(\phi)) = \phi$

Démonstration. Il suffit de montrer le deuxième point. En effet $\phi \in \mathbf{L}_1,(\mathbb{R}^n)$ en découle pour p=0, le premier point en est une conséquence directe et le troisième point s'obtient grâce au théorème précédent. Soit $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_j F(\phi) &= -iF(x_j\phi) \\ \xi_j F(\phi) &= -iF(\partial_j\phi) \end{aligned}$$

donc, par récurrence, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\xi^\alpha \partial^\beta F(\phi)| = |F(\partial^\alpha(x^\beta \phi))|$. On calcule :

$$\begin{aligned}
N_p(F(\phi)) &= \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \left\| F(\partial^\alpha(x^\beta(\phi))) \right\|_{\mathbf{L}_\infty} \\
&\le \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \left\| \partial^\alpha(x^\beta(\phi)) \right\|_{\mathbf{L}_1} \\
&\le X_p \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \left\| x^\beta \partial^\alpha(\phi) \right\|_{\mathbf{L}_1} \\
&\le X_p \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \left\| (1+\sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1}) x^\beta \partial^\alpha(\phi) \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1})} \right\|_{\mathbf{L}_1} \\
&\le X_p \left\| \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1})} \right\|_{\mathbf{L}_1} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \left\| (1+\sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1}) x^\beta \partial^\alpha(\phi) \right\|_{\mathbf{L}_\infty} \\
&\le X'_p \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p+n+1} \left\| x^\beta \partial^\alpha(\phi) \right\|_{\mathbf{L}_\infty} \\
&\le X'_p N_{p+n+1}(\phi)
\end{aligned}$$

X_p est obtenu en développant $\partial^\alpha(x^\beta(\phi))$ à l'aide de la formule de Leibniz et $X'_p = X_p \left\| \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1})} \right\|_{\mathbf{L}_1}$. □

2.3 Dans S′

Lemme 2. *$u \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow u$ est une forme linéaire sur $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\exists C_u \in \mathbb{R}, \exists p_u \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathbf{S}, |<u,\phi>| \le C_u N_{p_u}(\phi)$.*

On définit $F(u)$ par $\forall \phi \in \mathbf{S}, <F(u),\phi> = <u, F(\phi)>$. Cette relation prolonge la relation $\forall \phi \in \mathbf{S}, <F(f),\phi> = <f, F(\phi)>$ pour $f \in \mathbf{L}_1$ que l'on obtient par le théorème de Fubini :

$$\int f(x) \int e^{-ix.y} \phi(y) dy dx = \int \phi(y) \int e^{-ix.y} f(x) dx dy.$$

On montre que la forme linéaire ainsi définie appartient à $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^n)$ à l'aide du lemme :
Soit $\phi \in \mathbf{S}$,

$$\begin{aligned}
|<F(u),\phi>| &= |<u,F(\phi)>| \\
&\le C_u N_{p_u}(F(\phi)) \\
&\le C_u X N_{p_u+n+n}(\phi)
\end{aligned}$$

la dernière inégalité est obtenue grâce au théorème 3. On peut aussi définir $\overline{F}$ de la même façon sur $\mathbf{S}$.

Théorème 4. *La transformation de Fourier est une bijection de* $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même, d'inverse* $(2\pi)^{-n}\overline{F}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} < \overline{F}(F(u)), \phi > &=< (F(u)), \overline{F}(\phi) > \\ &=< u, F(\overline{F}(\phi)) > \\ &=< u, (2\pi)^n \phi > \end{aligned}$$

De même $< F(\overline{F}(u)), \phi > =< u, (2\pi)^n \phi >$ □