Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé. On considère des variables aléatoires (v.a.) définies sur cet espace, à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ou $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1) Notion d'espérance et de variance

définition 01 : espérance
Soit X, une v.a. tq. $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle espérance de X le réel $\int_\Omega X \, d\mathbb{P}$, noté $\mathbb{E}[X]$

- on dit que X est centrée ssi $\mathbb{E}[X] = 0$
- si $X \notin \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas

définition 02 : moments
Soit X, une v.a. et soit $p \in \mathbb{N}$ tq $X^p \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P})$
On appelle moment d'ordre p de X le réel $\mathbb{E}[X^p]$

Proposition 01 : Propriété de l'espérance
Soient X et Y, deux v.a. admettant une espérance et soit $a \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}[aX + Y] = a\,\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

Proposition 02 :
- $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$, $\forall A$ mesurable
- Si X est discrète, $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X = k)$
- Si X admet une densité f, $\mathbb{E}[X] = \int_\mathbb{R} x f(x)\,dx$

exemples : → Si X suit la loi de poisson de paramètre λ, $\mathbb{E}[X] = \lambda$
→ Si X suit la loi exponentielle de paramètre θ, $\mathbb{E}[X] = 1/\theta$

Théorème 1 : Théorème de Transfert
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mesurable et soit X, une v.a.
$f(X) \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P})$ ssi $f \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P}_X)$ et dans ce cas,
$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_\mathbb{R} f(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$$

applications → Si X est discrète, $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\,\mathbb{P}(X = k)$
→ Si X est à densité, de densité f_X, $\mathbb{E}[f(X)] = \int_\mathbb{R} f(x) f_X(x)\, d\lambda(x)$

Théorème 2 : Changement de Variables
Soit X, une v.a. admettant une densité f_X.
Soit h, un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ de Jacobien J_h.
La variable aléatoire $h(X)$ admet une densité f définie par
$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ f(y) = |J(y)|^{-1} f_X \circ h^{-1}(y)$$

application : Le théorème de transfert associé au théorème de changement de variable permet de calculer la loi d'une v.a.
Exemple : si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $\forall p > 0$, $-\frac{1}{p}\ln(U) \sim \mathcal{E}(p)$

2. Variance et covariance

définition 03 : Variance et écart-type
Soit X, une v.a. tq $X \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{P})$.
on appelle variance de X la quantité $\mathbb{V}ar(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
on appelle écart-type de X la quantité $\sigma_X := \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$

on dit que X est réduite si $\mathbb{V}ar(X) = 1$.

Proposition 03 : Formule de Koenig
Soit X, une v.a. admettant une variance.
$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

exemples :
si $X \sim \mathcal{E}(\theta)$, $\mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\theta^2}$
si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathbb{V}ar(X) = \lambda$

Proposition 04 : Propriété de la variance
Soit X, une v.a. et soit $a \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{V}ar(aX) = a^2\,\mathbb{V}ar(X)$
- $\mathbb{V}ar(X + a) = \mathbb{V}ar(X)$
- $\mathbb{V}ar(X) = 0 \iff X$ est constante p.s.

définition 04 : covariance
Soient X et Y, deux v.a. tq $(X, Y) \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{P})^2$.
$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ existe et s'appelle la covariance de X et Y, notée $cov(X, Y)$

Proposition 05: Propriété de la covariance

Soient X et Y, deux v.a.

$cov(X,Y) = cov(Y,X) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{V}ar(X,Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2cov(X,Y)$

$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow cov(X,Y) = 0$

Définition 05: Matrice de covariance

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire.
On appelle Matrice de covariance de X la matrice M de terme général $M_{ij} = cov(X_i, X_j)$

Cette matrice est symétrique, réelle, définie, positive.

3. Inégalités Fondamentales

Proposition 06: Inégalité de Markov

Soit X, une v.a. positive et soit $t > 0$.

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Proposition 07: Inégalité de Tchebytchev

Soit X, une v.a. admettant une variance

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{t^2}$$

Proposition 08: Inégalité de Jensen

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe et soit X, une v.a tq $(X, \phi(X)) \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathbb{P})^2$.

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$$

Proposition 09: Inégalité d'Hölder

Soient X et Y, deux v.a. tq $X \in \mathbb{L}_p(\Omega, \mathbb{P})$ et $Y \in \mathbb{L}_q(\Omega, \mathbb{P})$.

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}\, \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}$$

conséquence: $\forall q > 1$, si X, une v.a., admet un moment d'ordre q, alors, $\forall p \in [1, q]$.

II Fonction génératrice et fonction caractéristique

1. Définition et Propriétés

définition 06: Fonction génératrice des moments

Soit X, un vecteur aléatoire.
On appelle fonction génératrice des moments la fonction L_X définie par $L_X(s) = \mathbb{E}[e^{\langle s, X \rangle}]$ lorsque cela existe.

Proposition 10: Analycité de L_X

Soit X, une v.a. tq L_X est défini sur un voisinage de 0.
Alors, L_X est analytique et $L_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} s^n$

Proposition 11: Caractérisation de la loi

La transformée de Laplace, si elle est définie au voisinage de 0, caractérise la loi.

Définition 07: Transformée de Fourier

Soit X, un vecteur aléatoire.
On appelle fonction caractéristique de X la fonction φ_X définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}]$ lorsque cela existe.

Proposition 12:

La fonction caractéristique caractérise la loi

Théorème 3: Formule d'inversion de Fourier

Soit X, une v.a. de fonction caractéristique φ_X.
Si φ_X est intégrable, alors X admet une densité f_X, continue et bornée définie par $f_X(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \varphi_X(t)\,dt$

application:

Soit X, une v.a. admettant un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$.
Alors φ_X est k fois dérivable et $\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.
En particulier, $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$

Théorème 4: Théorème des Moments
Deux v.a. à valeurs dans un intervalle borné qui ont les mêmes moments sont de même loi

$\boxed{\text{DVP}}$: Etude de la loi gamma

2. Le cas de l'indépendance

Définition 08: Variables aléatoires indépendantes
Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires est indépendante ssi $\forall J\subset I$, fini, $\forall (A_j)_{j\in J}$ des mesurables, $\mathbb{P}(\forall j\in J, X_j\in A_j)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j\in A_j)$

Proposition 13: Caractérisation par la fonction caractéristique
Soient X et Y, deux v.a. $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \varphi_{(X,Y)}(s,t)=\varphi_X(s)\varphi_Y(t)$

exemple: une somme de v.a. indépendante de loi de Bernoulli suit une loi binomiale.

Application: Théorème de Bernstein [DVP]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, continue.
La suite des Polynômes de Bernstein de f converge uniformément vers f.

Définition 09: Variables non corrélées
Deux v.a. X et Y sont non corrélés ssi $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Proposition 14: indépendance et non corrélation
$X\perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X$ et Y sont non corellés.

La réciproque est fausse.

exemple: $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $Y=X^2$ sont non correlés ~~et~~ non indépendants.

Proposition 15: Identité de Bienaymé
Si $(X_1,\dots,X_n)$ sont des v.a. 2 à 2 non corrélées, alors $\mathbb{V}ar(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n \mathbb{V}ar(X_i)$

III Application à la convergence

1. Convergences presque sûre et en probabilité

définition 10: convergence presque sûre; convergence en proba.
Soit (X_n) une suite de v.a.
- (X_n) CV presque sûrement vers $X \Leftrightarrow \mathbb{P}(\omega\in\Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega))=1$
- (X_n) CV en proba vers $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$ noté $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$

proposition 16: Si $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$, alors (X_n) CV p.s. vers X

Théorème 4: Loi des Grands nombres faible
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et de même loi
Si $\mathbb{E}[X_1]$ existe, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$

Théorème 5: Loi des grands nombres forte
Soit (X_n), une suite de v.a. indépendantes et de même loi.
$\mathbb{E}[X_1]$ existe $\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to \mathbb{E}[X_1]$ p.s.

Application: Méthode de Monte-Carlo
Si B est borné et $f:B\to\mathbb{R}$, mesurable
Si (X_n) est une suite de v.a. indépendante et de loi uniforme sur B.
Si $f(X_1)\in\mathbb{L}_1(B)$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)\to\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f\,d\lambda$ p.s.

2. Convergence en loi

définition 11: convergence en loi
Soit (X_n), une suite de v.a.
on dit que (X_n) CV en loi vers X (noté $X_n\Rightarrow X$) ssi $\forall t\in\mathbb{R}$, F_X est continue en $t \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$

F_X désigne ici la fonction de répartition.

Proposition 17: $(X_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}X \Rightarrow (X_n\Rightarrow X)$

Théorème 5: Levy
Soit (φ_n), une suite de fonction caractéristiques de v.a. X_n.
Si $\forall t\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$, alors φ est la fonction caractéristique d'une v.a X tq $X_n\Rightarrow X$

app: Si (X_n) est une suite de v.a. indépendante et de loi uniforme sur $[\![0,9]\!]$, alors $\sum X_k\ldots\sim\mathcal{U}([0,10])$.

Developpement 1 : Etude de la loi Gamma.

Soit $a>0$ et $\lambda>0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(a,\lambda)$, de densité

$$f(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

① Calcul de $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X]=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}x^a dx$$

$$\mathbb{E}[X]=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{u^a}{\lambda^a}\frac{du}{\lambda}$$ par le changement de variable $u=\lambda x$.

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^a du=\frac{\Gamma(a+1)}{\lambda\Gamma(a)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X]=\frac{a}{\lambda}}$$ car $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$

② Calcul de $\mathbb{E}[X^2]$ et de $Var(X)$.

$$\mathbb{E}[X^2]=\int_0^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}x^{a+1}dx=$$

$$\mathbb{E}[X^2]=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{u^{a+1}}{\lambda^{a+1}}\frac{du}{\lambda}=\frac{1}{\lambda^2\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{a+1}du=\frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2\Gamma(a)}=\frac{a^2+a}{\lambda^2}$$

d'où $Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=\frac{a^2+a}{\lambda^2}-\frac{a^2}{\lambda^2}=\frac{a}{\lambda^2}$

Donc $\boxed{Var(X)=\frac{a}{\lambda^2}}$

③ Calcul de la transformée de Laplace $\mathcal{L}_X$ de X.

Lorsque l'intégrale existe, on a

$$\mathcal{L}_X(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{(t-\lambda)x}x^{a-1}dx.$$

En 0, $e^{(t-\lambda)x}x^{a-1}\sim x^{a-1}$ et $a-1>-1$, donc $e^{(t-\lambda)x}x^{a-1}$ est intégrable en 0

En $+\infty$, $e^{(t-\lambda)x}x^{a-1}$ est intégrable si et seulement si $t-\lambda<0$, donc $\mathcal{L}_X$ sera définie sur $]-\infty,\lambda[$. Et alors, avec le changement de variables $x=\frac{u}{\lambda-t}$

$$\mathcal{L}_X(t)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{u^{a-1}}{(\lambda-t)^{a-1}}\frac{du}{\lambda-t}=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a)}{(\lambda-t)^a}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a.$$

④ Calcul de la fonction caractéristique de X, φ_X.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} x^{a-1}\,dx.$$

Montrons que φ_X peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)<\lambda\}$. Pour $z\in D$, on pose

$$F(z) := \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{(z-\lambda)x} x^{a-1}\,dx.$$

Avec $g(x,z) = e^{(z-\lambda)x}x^{a-1}$, on a alors, pour appliquer ~~d'après~~ le théorème d'holomorphie sous l'intégrale

- $\forall z\in D$, $g(\cdot,z)$ est mesurable
- $\forall x>0$, $g(x,\cdot)$ est holomorphe sur D.
- $\forall \varepsilon>0$, $\forall x>0$, $\forall z\in D$ tel que $\mathrm{Re}(z)<\lambda-\varepsilon$ on a

$$|g(x,z)| = e^{(\mathrm{Re}(z)-\lambda)x}x^{a-1} \le e^{-\varepsilon x}x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Donc F est bien définie et holomorphe sur D.

D'autre part, pour tout $z\in D$, $\mathrm{Re}(\lambda-z)>0$, donc on peut définir $(\lambda-z)^a = e^{a\log(\lambda-z)}$

avec $\log$ la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

On peut donc définir $G: z\mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^a$ qui prolonge L_X sur D.

Comme F et G coïncident sur $]-\infty,\lambda[$, donc $F=G$ sur D, par le principe de prolongement analytique, d'où

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t) = F(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$$

Developpement 8 : Théorème de Bernstein

Théorème : Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité uniforme : $\omega(h)=\sup(|f(u)-f(v)|,|u-v|\leq h)$

Pour $n\geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x)=B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}f(\frac{k}{n})$ le $n$ième polynôme de Bernstein de f, alors : ① B_n converge vers f uniformément sur $[0,1]$

② Plus précisement, $\|f-B_n\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, C constante numérique

③ L'estimation de ② est optimale, il existe une fonction lipschitzienne g telle que $\|g-B_n\|_\infty$ soit supérieur à $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$, pour δ constante strictement positive

Demonstration

① Soit $x\in[0,1]$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires independantes identiquement distribuées (va.iid) suivant une loi de Bernoulli de paramètre x. On note $S_n := X_1+X_2+\cdots+X_n$.

Comme S_n suit une loi binômiale, $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]=B_n(x)$ est un polynome en x qui doit être proche de $\mathbb{E}[f(x)]=f(x)$, puisque $\frac{S_n}{n}$ tend en probabilité vers x.

Notons $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $[0,1]$ et fixons $\delta\in[0,1]$

Nous avons $|f(x)-B_n(x)|\leq |\mathbb{E}(f(x)-f(\frac{S_n}{n}))|\leq \mathbb{E}(|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|)$

Or, $|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|\leq \begin{cases}\omega(\delta) \text{ si } |x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta\\ 2\|f\|_\infty \text{ si } |x-\frac{S_n}{n}|>\delta\end{cases}$

d'où $\mathbb{E}[|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|]\leq \omega(\delta)\mathbb{P}(|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta)+2\|f\|_\infty\mathbb{P}(|x-\frac{S_n}{n}|>\delta)$

Par inegalité de Tchebychev, $\mathbb{P}(|x-\frac{S_n}{n}|>\delta)\leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})}{\delta^2}$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\delta^2}$$
$$\leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$
$$\leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

donc $|f(x)-B_n(x)|\leq\omega(\delta)+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

donc $\limsup\|f-B_n\|_\infty\leq\omega(\delta)$ et comme $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$, on a bien convergence uniforme de B_n vers f.

② D'après le ①, on a $\mathbb{E}(|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|)\leq\mathbb{E}(\omega(|x-\frac{S_n}{n}|))$

Montrons que $\omega(\lambda h)\leq(\lambda+1)\omega(h)$.

Par croissance de ω et $\omega(h+k)\leq\omega(h)+\omega(k)$, on a que $\omega(nh)\leq n\,\omega(h)$, pour $n\in\mathbb{N}$.

Donc $\omega(\lambda h)\leq\omega(\lceil\lambda\rceil h)\leq\lceil\lambda\rceil\omega(h)\leq(\lambda+1)\omega(h)$.

On en déduit $|f(x)-B_n(x)|\leq\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})\mathbb{E}(\sqrt{n}|x-\frac{S_n}{n}|+1)$.

$$\leq\omega(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\left(1+\sqrt{n}\|x-\tfrac{S_n}{n}\|_1\right)$$
$$\leq\omega(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\left(1+\sqrt{n}\|x-\tfrac{S_n}{n}\|_2\right) \text{ par inegalité de Hölder.}$$

Or $\|x-\frac{S_n}{n}\|_2^2 = \mathbb{E}(|x-\frac{S_n}{n}|^2)$

$$= \mathrm{Var}(x-\tfrac{S_n}{n}) + (\mathbb{E}(x-\tfrac{S_n}{n}))^2$$

$$= \frac{1}{n^2} nx(1-x) + (x-\tfrac{1}{n}nx)^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

Donc $|f(x)-B_n(x)| \leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})(1+\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}) \leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})[1+\sqrt{x(1-x)}] \leq \frac{3}{2}\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ car $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

donc $\|f-B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$

③ Posons $g : x \mapsto |x-\frac{1}{2}|$ comme $\omega(h) \leq h$, on a $\|g-B_n\|_\infty \geq |g(\frac{1}{2})-B_n(\frac{1}{2})|$

$$\geq |B_n(\tfrac{1}{2})|$$

$$\geq \mathbb{E}[|\tfrac{S_n}{n}-\tfrac{1}{2}|]$$

$$\geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|2S_n-n|].$$

Donc $\|g-B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n|]$, en posant $\varepsilon_i = 2\delta_i - 1$, δ_i qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donc ce sont des variables de Rademacher, et alors, par inégalité de Khintchine, il vient

$$\|g-B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n\|_1$$

$$\geq \frac{1}{2n\sqrt{2}}\|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega(\tfrac{1}{\sqrt{n}})$$ ce que l'on voulait démontrer