260 : Espérance, variance et moments de variables aléatoires.

pas uniformément intégrable

Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs réelles.

I. Espérance

① Définitions et exemples. [BL] p 52-55

d'abord f° pos. ⚠ = moyenne

Def 1 : Soit X une variable aléatoire (VA)
$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$ est appelée espérance de X.
On dit que X est centrée si $\mathbb{E}[X] = 0$, intégrable si $\mathbb{E}[X] < +\infty$

[BL] p 115 p 49

Rmq 2 : • Si X est une VA discrète alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} x \, \mathbb{P}(X=x)$
• Si X est une VA à densité et f cette dernière alors $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$.
• Plus généralement, par le théorème de transfert, on a pour X VA intégrable et φ borélienne positive : $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$

Ex 3 : * $X \sim \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$.
* $X \sim \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = pn$.
* $X \sim \mathcal{E}(\theta) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}$. $\left(f : x \mapsto \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \right)$
* $X \sim \mathcal{C}(1) \Rightarrow X$ n'admet pas d'espérance. $\left(f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)} \right)$

Prop 4 : X vecteur aléatoire dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{P}(X \in A)$.

[BL] p 60

Def 5 : Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire. On définit son vecteur moyen par $\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$

② Propriétés et indépendance.

[BL] p 56 [OD] p 18

Prop 6 : $\mathbb{E}$ est une forme linéaire continue sur l'espace des VA intégrables.

Prop 7 : Inégalité de Jensen : Soit φ convexe sur $\mathbb{R}$ et X VA intégrable telles que $\varphi(X)$ est intégrable, alors : $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Ex 8 : $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$

[BL] p 58

Prop 8 : Si X est intégrable et $t > 0$ alors
$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}$ (Inégalité de Markov)

Prop 9 : Soit X VA positive de fonction de répartition F alors $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F(t))\,dt$. important intégrable

[BL] p 57

Prop 10 : $(X_i)_{i \in J}$ VA indépendantes ssi $\forall J \subset I$ famille finie et $\forall (\Phi_i)_{i \in J}$ fonctions boréliennes tq $\Phi_i(X_i)$ est intégrable $\mathbb{E}\left[\prod_{i \in J} \Phi_i(X_i)\right] = \prod_{i \in J} \mathbb{E}[\Phi_i(X_i)]$.

[BL] p 79-80

Rmq 11 : En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont intégrables et indépendantes alors $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$.

II. Moments d'ordre 2.

① Variance et covariance [BL] p 56-59.

Def 12 : X VA est dite de carré intégrable si $\mathbb{E}[|X|^2] < \infty$.

Def 13 de X : Soit X VA de carré intégrable. On appelle variance $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Rmq 14 : $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \geq 0$.

Ex 15 : * Si $\mathrm{Var}\, X = 0$ alors $X = \mathbb{E}[X]$ ps.
* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $\mathrm{Var}\, X = np(1-p)$.
* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[X] = 0$
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$

Prop 16 : $\alpha \in \mathbb{R}$ $\left| \begin{array}{l} \mathrm{Var}(X+\alpha) = \mathrm{Var}(X) \\ \mathrm{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) \end{array} \right.$

Ex 17 : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mathrm{Var}(\sigma X)$.

Interprétation 18 : Plus la variance est grande, plus la VA est dispersée, ie. prend avec forte probabilité des valeurs éloignées de sa moyenne.

Prop 19 : Inégalité de Tchebychev : Soit X de carré intégrable, alors $\forall t > 0$ $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}\, X}{t^2}$.

[OD] p 126

Prop 20 : Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient X et Y deux VA de carré intégrable alors XY est intégrable et $|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|X|^2]^{1/2} \, \mathbb{E}[|Y|^2]^{1/2}$.

[CV] p128

Def 21 : Soient X, Y deux VA de carré intégrable. On appelle covariance de X et Y : $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$.

Rmq 22 :
* Cov est bien définie par la prop 20.
* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Ex 23 : $X \perp\!\!\!\perp Y$, où X, Y sont des VA centrées de carré intégrable. $\mathrm{Cov}(X, Y+X) = \mathrm{Var}\, X$.

p20

Def 24 : Soient X et Y des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. On note $X = (X_1, \dots, X_p)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_q)$. La matrice de covariance de X, Y de dimension (p,q) est définie par $(\mathrm{Cov}(X_i, Y_j))_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$

② Lien avec l'indépendance. [BL] 80-81

Def 25 : On dit que X, Y VA de carré intégrable sont non corrélées si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Prop 26 : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Rmq 27 : Réciproque fausse : si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Prop 28 : L'équivalence est vraie dans le cas de vecteurs gaussiens.

Prop 29 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux non corrélées alors $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\, X_i$

App 30 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\, X_i \quad \forall t > 0.$$

App 31 : * Théorème de Bernstein :
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$. $\forall n \geq 1$, $B_n(f,x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$
Alors B_n converge uniformément vers f sur [0,1]. **DEV 1**

[ZQ]

* Théorème de Weierstrass :
L'ensemble des fonctions polynômes de [a,b] dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$

III. Moments d'ordre p.

① Définitions et propriétés.

Def 32 : Soit $p \geq 1$. On note $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des VA X telles que $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$. Si $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors $\mathbb{E}[X^p]$ est appelé moment d'ordre p de X. [OA] p122

Ex 33 : $\mathbb{E}[X^3] = 0$ $\mathbb{E}[X^4] = 3$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Prop 34 : Inégalités de Hölder et Minkowski :
- $X \in \mathcal{L}^p$, $Y \in \mathcal{L}^q \Rightarrow XY \in \mathcal{L}^1$ et $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}\,\mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$ [O2] p15-16.
- $X \in \mathcal{L}^p$, $Y \in \mathcal{L}^p \Rightarrow X+Y \in \mathcal{L}^p$ et $\mathbb{E}[|X+Y|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p}$

Prop 35 : $\forall p, q$ tels que $1 \leq p \leq q$ alors $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

App 36 : * $X_n \xrightarrow{L^p} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$
et donc la convergence L^q implique la convergence L^p $(1 \leq p \leq q)$ [CO] p148

② Fonctions liées aux moments.

Def 37 : Soit X VA.
- on appelle fonction caractéristique de X la fonction : $t \mapsto \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.
- on appelle transformée de Laplace ou fonction génératrice des moments la fonction : $s \mapsto L_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$ pour les s tels que $\mathbb{E}[e^{sX}]$ existe. [BL] p61-66 [OU] p139
- on appelle fonction génératrice de X à valeurs dans $\mathbb{N}$ $u \mapsto \mathbb{E}[u^X] = G_X(u)$ pour les u tels que $\mathbb{E}[u^X]$ existe.

Prop 38 :
- Si $X \in \mathcal{L}^p$ alors φ est p-fois dérivable et $\varphi^{(p)}(t) = i^p \mathbb{E}[X^p e^{itX}]$. En particulier $\varphi^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$
Réciproquement, si p est pair et φ est p fois dérivable en 0 alors X admet un moment d'ordre k $\forall\, k \leq p$ [BL] p61-66.
- Si φ est analytique, la loi de X est caractérisée par ses moments.
- Si X, Y sont à valeurs dans [a,b] et $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^p]$ $\forall p \in \mathbb{N}$ alors X et Y sont de même loi.

Régularité de φ ~ moments

[BL] p68 **C-ex 39** : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $Z = e^X$. f la densité de Z.
pour $a \in [-1;1]$: Z_a de densité $f_a(x) = f(x)(1 + a\sin(2\pi \ln x))_{x>0}$
alors Z et Z_a ont les mêmes moments mais pas les mêmes densités.

[BL] p66 **Prop 40** : X VA telle que e^{tX} est intégrable pour tout t dans un intervalle ouvert contenant 0. Alors L_X est définie sur un voisinage de 0, analytique et $L_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]$.

[O2] p133 **App 41** : Inégalité de Hoeffding : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de VA indépendantes, centrées et bornées ps : $\exists c_n > 0 \,/\, |X_n| \leq c_n$ ps. Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.
Alors $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)$ $\forall \varepsilon > 0$.

[O1] p140 **Prop 42** : Soit X VA à valeurs dans $\mathbb{N}$. X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ ssi G_X est r fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas : $G_X^{(r)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)]$
En particulier $\mathbb{E}[X] = G'_X(1^-)$.

App 43 : Processus de Galton-Watson. **DEV 2**

IV Théorèmes limites. [BL] p131-136.

Dans toute cette partie, $(X_i)_{i\geq 1}$ désigne une suite de VA indépendantes de même loi que X.
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Thm 44 : Loi faible des grands nombres L^2 avec Tcheby.
Si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$.

Thm 45 : (ADMIS) Loi forte des grands nombres.
$\mathbb{E}[|X|] < +\infty \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} \mathbb{E}[X]$

Ex 46 : $X \sim b(a)$ alors $\frac{Y}{n} \xrightarrow{ps} a$ où $Y \sim B(n,a)$.

[RIV] p8 **App 47** : $\hat{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ l'estimateur de la moyenne empirique est fortement consistant.

App 48 : Méthode de Monte-Carlo : On veut calculer $I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$ où f est intégrable. [TOU] p78-95
Soit $(U_1, \dots, U_d)$ un vecteur de VA indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $X = f(U_1, \dots, U_d)$. $I = \mathbb{E}[X]$. Par la loi des grands nombres $\hat{X}_n$ converge ps vers I.

Thm 49 : Théorème central limite
Si $\mathbb{E}[X^2]$ alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ **DEV 3** [O2]
où $m = \mathbb{E}[X]$
et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) > 0$

Appli 50 : Intervalle de confiance asymptotique d'un paramètre estimé.

[BL] Probabilité, P. Barbe et M. Ledoux.
[O1] Probabilités, J.Y Ouvrard. Tome 1.
[O2] Probabilités, J.Y Ouvrard. Tome 2.
[COT] Exercices de probabilités. Cottrel.
[RIV] Statistique en action. Rivoirard / Stoltz.
[TOU] Thèmes de probabilités et statistique, Toulouse.

Processus de Galton-Watson

Soit X une va intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n < \infty$

Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ famille de va iid de loi $\mathbb{P}_X$.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$

Principe :

On veut modéliser la taille d'une population avec Z_n, qui modélise le nombre d'individus à la $n^{\text{ième}}$ génération.

$\forall i \in [\![1, Z_n]\!]$, $X_{i,n}$ représente le nombre de descendants de l'individu i de la $n^{\text{ième}}$ génération. On va se poser la question de la valeur de $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$

Lemme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}, Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n dépend de Z_{n-1} et de $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}^*}$

donc Z_n ne dépend que de $(X_{i,j})_{i\geq 0, j\leq n-1}$

Par indépendance des $(X_{i,j})_{i,j}$, on a le résultat $\square$

Remarque : En pratique, on expliquera le principe et ce premier lemme uniquement à l'oral et on ne perdra pas de temps à l'écrire.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0)$

$Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, donc $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et

$$\pi_\infty = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi_n$$

cas extrêmes : si $p_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n \geq 1$ ps et $\pi_\infty = 0$

si $p_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = 0$ ps et $\pi_\infty = 1$

Le cas intéressant est donc $p_0 \in]0,1[$

<u>prop:</u>

Soit $G : s \longmapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$

1. G est bien définie et C^1 sur $[0,1]$
2. (i) G est strictement croissante sur $]0,1[$
   (ii) G est convexe sur $]0,1[$
   (iii) G est strictement convexe sur $]0,1[\iff p_0 + p_1 < 1$

<u>preuve:</u>

1. $\forall k \in \mathbb{N}$, $s \longmapsto p_k s^k$ est de classe C^1 sur $[0,1]$

la série $\sum_{k \geq 0} p_k 1^k$ converge et $\sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1}$ con (&int.) donc cvu sur $[0,1]$

Donc $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ cvu vers G, qui est C^1 sur $[0,1]$.

2. Le RCV est ≥ 1.

$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$ et $G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$

Ainsi a) b) et c) sont évidents. □

<u>prop:</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n : s \longmapsto \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) s^k$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G^n$ sur $[0,1]$

<u>preuve:</u>

par récurrence, $Z_1 \sim \mathbb{P}_X$ donc ok pour $n=1$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in [0,1]$.

$G_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}]$

$\quad" = \mathbb{E}[\sum_{j=0}^{\infty} 1_{Z_n = j} \prod_{i=1}^{j} s^{X_{i,n}}]$

Fubini-Tonelli

$\quad" = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[1_{Z_n=j} \prod_{i=1}^{j} s^{X_{i,n}}] \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \underbrace{\prod_{i=1}^{j} \mathbb{E}[s^{X_{i,n}}]}_{\mathbb{E}[s^X]^j}$

$\quad" = G_n(G(s))$ □

prop : π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

preuve :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = G_n(0)$ donc $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$ et G est continue donc π_∞ est un point fixe de G. Soit u un pt fixe de G. de plus $\pi_0 = 0 \leq u$

donc par croissance de G, $\pi_1 = G(\pi_0) \leq G(u) = u$

par réc. immédiate $\forall n, \pi_n \leq u$ et on passe à la limite □.

Théorème :

$m \leq 1 \Rightarrow \pi_\infty = 1$.

$m > 1 \Rightarrow \pi_\infty$ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$

preuve :

Si $p_0 + p_1 = 1$: $G : x \mapsto p_0 + p_1 x$

$p_0 > 0$ donc $G \neq id$ donc il y a un seul point fixe : $(1,1)$.

Si $p_0 + p_1 \neq 1$:

Alors G est strictement convexe donc $x \mapsto G(x) - x$ aussi donc cette fonction s'annule au plus deux fois, $G'(0) = p_1$ et $G'(1) = m$

Si $m > 1$

x	0	π_∞	α	1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1 < 0$	$-$	0 $+$	$m - 1 > 0$
$G(x) - x$	$p_0 \searrow$	$0 \searrow$	$G(\alpha) - \alpha < 0 \nearrow$	0

Si $m \leq 1$

x	0		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1 < 0$	$-$	$m - 1 \leq 0$
$G(x) - x$	$p_0 \searrow$		0

donc $\pi_\infty = 1$

□

Rq1: Ce développement est très long, il s'agira d'énoncer un maximum de choses à l'oral.

Rq2: Il n'y a pas de référence pour ce développement

Rq3:

On peut se poser la question du nombre d'individus moyen au temps n.

Par récurrence : $\mathbb{E}[Z_0] = 1 = m^0$

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_n]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} | Z_n]]$$
$$\quad " = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} 1_{i \leq Z_n} X_{i,n} | Z_n]]$$
$$\quad " = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} 1_{i \leq Z_n} \mathbb{E}[X_{i,n} | Z_n]] \quad (\text{par Fubini-Tonelli})$$
$$\quad " \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}[X_{i,n}]] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Z_n} m] = m\,\mathbb{E}[Z_n]$$

Donc $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ $\square$

Th de Weierstrass par Bernstein

Zuily-Queffelec p 518

Th : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité (ie : $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)| ; |u-v| \leq h\}$.
Pour $n \geq 1$, $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$,
le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f.
Alors : (i) B_n cvu vers f sur $[0;1]$
(ii) $\|f - B_n\|_\infty \leq C\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où C est une constan

Preuve :
(i) Soit $x \in [0;1]$ et $(X)_i$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{B}(x)$.
Soit, $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donc $S_n \sim B(n,x)$
$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$

De plus $\mathbb{E}[f(x)] = f(x)$
et $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ (LGN)

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right|$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]$$

f est continue sur $[0;1]$ compact donc f est uniformément continue (th de Heine), donc $\omega(\delta)$ est défini pour tout $\delta > 0$ et $\omega(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Si $\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leq \delta$ alors $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta)$

Par ailleurs $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty$

$$|f(x)-B_n(x)| \leq \mathbb{E}\left[|f(x)-f(\tfrac{S_n}{n})|\,\mathbb{1}_{\{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta\}}+|f(x)-f(\tfrac{S_n}{n})|\,\mathbb{1}_{\{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta\}}\right]$$

$$\leq \omega(\delta)\underbrace{\mathbb{P}(|x-\tfrac{S_n}{n}|\leq\delta)}_{\leq 1}+2\|f\|_\infty\,\mathbb{P}(|x-\tfrac{S_n}{n}|>\delta)$$

$$\mathbb{P}(|x-\tfrac{S_n}{n}|>\delta) \leq \frac{\mathrm{Var}(x-\frac{S_n}{n})}{\delta^2}=\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\delta^2}=\frac{n\,x(1-x)}{n^2\delta^2}=\frac{x(1-x)}{n\,\delta^2}$$

Or $\forall x\in[0;1[$, $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$

donc $\mathbb{P}(|x-\frac{S_n}{n}|>\delta)\leq\frac{1}{4n\delta^2}$

$\therefore$

$\forall x\in[0;1]$, $|f(x)-B_n(x)|\leq\omega(\delta)+\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

d'où $\limsup\limits_{n\to+\infty}\|f-B_n\|_\infty\leq\omega(\delta)$, $\forall\delta>0$

Comme $\omega(\delta)\underset{\delta\to0}{\longrightarrow}0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-B_n\|_\infty=0$

(car $\liminf\limits_n\|f-B_n\|_\infty\geq0$ et $\limsup\limits_n\|f-B_n\|_\infty=0$)

Donc f cvu vers B_n sur $[0;1]$

(ii) Montrons que $\omega(\lambda h)\leq(\lambda+1)\,\omega(h)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

<u>Lem</u> : Pour $\delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}^+$, $\omega(\delta_1+\delta_2)\leq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$.

<u>Preuve du lem</u> :

Soient r, x tel que $x\geq r$ et $|x-r|\leq\delta_1+\delta_2$.

Si $|x-r|\leq\delta_1$, $|f(x)-f(r)|\leq\omega(\delta_1)\leq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$.

Sinon,

$|f(r)-f(x)|\leq|f(r)-f(r+\delta_1)|+|f(r+\delta_1)-f(x)|\leq\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$

car $x-(r+\delta_1)=x-r-\delta_1=|x-r|-\delta_1\leq\delta_1+\delta_2-\delta_1=\delta_2$.

$x-r-\delta_1\geq0$ car $x-r\geq\delta_1$

donc $|x-(r+\delta_1)|=x-r-\delta_1\leq\delta_2$

$\square$

Retour à la preuve du théorème :

Soit $h > 0$.

Grâce au lemme et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega(nh) \le n\,\omega(h)$

de plus ω est croissante,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\omega(\lambda h) \le \omega(\lceil \lambda \rceil h) \le \lceil \lambda \rceil \omega(h) \le (\lambda + 1)\,\omega(h)$

(car $\lceil \lambda \rceil \in \mathbb{N}$)

$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \le \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)$

D'où :

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\le \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\
&\le \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{E}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \tfrac{S_n}{n}\right|\right) \\
&= \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \tfrac{S_n}{n}\right\|_1\right) \\
&\le \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \tfrac{S_n}{n}\right\|_2\right) \quad \text{(par Hölder)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \left\|x - \tfrac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(x - \tfrac{S_n}{n}\right)^2\right] = \mathcal{V} \\
&= \mathrm{Var}\left(x - \tfrac{S_n}{n}\right) + \mathbb{E}\left[\left(x - \tfrac{S_n}{n}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\, n\, x(1-x) + \left(x - \frac{nx}{n}\right)^2 \\
&= \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

$$|f(x) - B_n(x)| \le \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\tfrac{1}{4n}}\right)$$

$$|f(x) - B_n(x)| \le \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Rq : $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est optimale.

(Si $f : x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$, on peut montrer que $\|f - B_n\|_\infty \ge M\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Théorème central limite

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

Référence : Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, p540+555 de la 4ème édition.

Théorème 1 (Théorème central limite).

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid dans L^2.
On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > 0$. Alors on a :

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration. Quitte à considérer les variables aléatoires $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$ on peut supposer $m = 0$ et $\sigma = 1$.
On cherche donc à montrer que $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite. Pour cela, on va utiliser le théorème de Lévy : on va montrer

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \underset{n}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

car si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ car les va X_i sont iid.

De plus, comme X_1 est dans L^2, par théorème on en déduit que φ est de classe C^2 et on connait ses dérivées en fonctions des moments de X_1 : $\varphi'(0) = im = 0$, $\varphi''(0) = -\sigma^2 = -1$. On peut donc écrire un développement de Taylor de φ à l'ordre 2 en l'origine :

$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi''_{X_1}(0) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit alors :

$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

On voudrait maintenant passer à la limite quand n tend vers l'infini, mais la quantité à l'intérieur de la parenthèse n'est pas réelle (une fonction caractéristique est à valeurs complexes, c'est caché dans le $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ici). Nous allons donc utiliser le lemme suivant qui traite le cas complexe :

Lemme 1.

Pour toute suite de complexes $(z_n)_n$ convergeant vers $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} e^z.$$

En appliquant le lemme à l'expression trouvée pour $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ on obtient :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Démonstration du lemme. Par la formule du binôme de Newton on a

$$e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\overset{n}{\cancel{+\infty}}} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k}.$$

De plus on a l'égalité

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n-j}{n}\right) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

donc

$$e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_n^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{z_n^k}{k!}\left(1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right).$$

Comme $1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq 0$ on en déduit alors

$$\begin{aligned}
\left|e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z_n|^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{|z_n|^k}{k!}\left(1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right) \\
&= e^{|z_n|} - \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n \\
&= e^{|z_n|} - e^{\left(n \log\left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)\right)} \\
&\underset{(*)}{\leq} e^{|z_n|} - e^{n\left(\frac{|z_n|}{n} - \frac{|z_n|^2}{2n^2}\right)} \\
&= e^{|z_n|}\left(1 - e^{\left(-\frac{|z_n|^2}{2n}\right)}\right) \\
&\underset{(**)}{\leq} \frac{|z_n|^2}{2n} e^{|z_n|}
\end{aligned}$$

$(\star)$ et $(\star\star)$ découlant à chaque fois d'une simple étude de fonction.

Cette inégalité nous permet alors de conclure car :

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \le |e^z - e^{z_n}| + \left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \le |e^z - e^{z_n}| + \frac{|z_n|^2}{2n}e^{|z_n|}$$

avec le terme de droite tendant vers 0 puisque la suite (z_n) converge vers z et qu'elle est alors bornée. □

Application : calcul d'intervalle de confiance asymptotique. de niveau $1-\alpha$

Modèle de la proportion de piles dans n jets d'une pièce : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid de loi $b(p)$. On cherche à estimer le paramètre p.
D'après le théorème central limite on a :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Donc en notant $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ on a :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

De plus, la loi faible des grands nombres donne : $\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}$.
Donc par le théorème de Slutsky on a finalement :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, en notant q le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (ie $\mathbb{P}(N \le q) = 1-\frac{\alpha}{2}$ si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$) on a :

$\mathbb{P}(N \geq q)$ car $\mathcal{N}(0,1)$ symétrique

$$\mathbb{P}\left(-q \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \le q\right) \simeq \mathbb{P}(N \le q) - \mathbb{P}(N \le -q) = 2\mathbb{P}(N \le q) - 1 \doteq 1-\alpha$$

pour n assez grand.
Donc pour n assez grand, p est dans l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}; \bar{X}_n + \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}\right]$ avec une probabilité proche de $1-\alpha$.
EN pratique on prend souvent $\alpha = 0.05$ et dans ce cas $q = 1.96$.

⚠ Galton Watson $\longrightarrow$ $[0,1]$? $]0,1[$? et $\mathbb{E}$ conditionnelle à la place.

<u>TCL</u> : – savoir faire le lemme pour log complexe.

– retrouver la f° carac d'une $\mathcal{N}(0,1)$ avec équa diff sur φ.