261

Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

<u>Motivation</u> : exprimer plus simplement certaines propriétés des variables aléatoires.

I - Fonction génératrice d'une v.a. discrète

<u>Cadre</u> : $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \delta_k$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$, et X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi μ.

<u>Définition 1</u> : La fonction génératrice G_X de X est définie par $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$, $s \in \mathbb{R}$.

<u>Remarque</u> : G_X est une série entière.

<u>Proposition 2</u> : Le rayon de convergence de G_X est ≥ 1. G_X est définie sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

<u>Corollaire 3</u> : G_X caractérise la loi μ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ p_k = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$$

<u>Exemple 4</u> : si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $(n \geq 1, p \in [0,1])$ alors $G_X(s) = (ps + 1 - p)^n$

<u>Exemple 5</u> : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ alors $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

<u>Proposition 6</u> : si X et Y sont deux v.a. indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

<u>Application 7</u> : • si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p)$ $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$

• si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$ $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

<u>Proposition 8</u> : pour tout $r \geq 1$,

$0 \leq \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)] = G_X^{(r)}(1) \leq +\infty$ où $G_X^{(r)}(1) = \lim_{s \nearrow 1} G_X^{(r)}(s)$. En particulier $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.

<u>Application 9</u> : • si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

• si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$

<u>Application 10</u> : Arbres de Galton-Watson

DEV 1

Soit $(X_{n,k})_{n,k \geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. de loi μ. Soit $Z_0 = 1$, soit $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$ pour $n \geq 0$. Z_n est le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ. On suppose $0 < p_0 < p_0 + p_1 < 1$ et $m = \mathbb{E}[Z_1] < +\infty$. On note $T = \inf\{n \geq 1 ; Z_n = 0\}$.

• Si $m \leq 1$, $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

• Si $m > 1$ $\mathbb{P}(T < +\infty)$ est l'unique point fixe de G_{Z_1} dans $]0,1[$.

II - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une v.a.

<u>Cadre</u> : X est une v.a. à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire canonique.

1) Fonction caractéristique

a) Définition et propriété de caractérisation

<u>Définition 11</u> : La fonction caractéristique (ou transformée de Fourier) de X (ou de la loi $\mathbb{P}_X$ de X) est la fonction φ_X définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} dP_X(x)$$

Remarques: φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ car $\int_{\mathbb{R}^d} |e^{i\langle t,x\rangle}| dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dP_X(x) = 1 < +\infty$.
De plus φ_X est à valeurs complexes et $|\varphi_X| \leq 1$.
En outre, $\varphi_X(0) = 1$ et $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

Proposition 12: si X possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} f(x)\,dx$. On dit également que φ_X est la transformée de Fourier de f.

Proposition 13: φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 14: φ_X caractérise la loi de X: si X et Y sont deux v.a. telles que $\varphi_X = \varphi_Y$ alors $P_X = P_Y$.

Théorème 15 (formule d'inversion de Fourier)
Si φ_X est intégrable alors X admet une densité continue bornée f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle} \varphi_X(t)\,dt.$$

Exemple 16: si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Exemple 17: si X suit une loi de Laplace de densité $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$, alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Application 18: soit X de loi de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$. Par l'exemple 17 et le théorème 15, on a $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{dt}{1+t^2}$ d'où $e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \varphi_X(x)$.

b) Fonction caractéristique et moments $(d=1)$

Proposition 19: • si $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$ alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et
$\forall 1 \leq k \leq n,\ \varphi_X^{(k)}(t) = i^k\, \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.
En particulier, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\, \mathbb{E}[X^k]$
• réciproquement si φ_X est k fois dérivable en 0 alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{k}{2}\right]$

Corollaire 20: si φ_X est analytique dans un voisinage de 0, alors P_X est caractérisée par ses moments.

Contre-exemple 21: Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $Z = e^X$ est de densité $f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1} e^{-(\log t)^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$ (densité de la loi log-normale). Pour $a \in [-1,1]$, la v.a. Z_a de densité $f_a(t) = f_Z(t)(1 + a\sin(2\pi \log t))$ possède les mêmes moments que Z, mais $f_a \neq f_Z$.

c) Indépendance de variables aléatoires

Proposition 22: si X et Y sont deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Théorème 23 : Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. X_1 et X_2 sont indépendants si et seulement si $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X_1, X_2)}(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$.

Application 24 : si X_1, X_2 sont deux v.a. indépendantes de loi de Laplace sur $\mathbb{R}$, alors $Y_1 = X_1 - X_2$ et $Y_2 = X_1 + X_2$ ont même loi mais ne sont pas indépendantes.

2) Transformée de Laplace

Définition 25 : la transformée de Laplace de X (ou fonction génératrice des moments) est la fonction L_X définie par $L_X(s) = \mathbb{E}[e^{\langle s, X\rangle}]$ (pour $s \in \mathbb{R}^d$ tel que $e^{\langle s, X\rangle}$ est intégrable)

Remarque : les propriétés de L_X sont analogues à celles de φ_X. Par exemple, si L_X est définie au voisinage de 0 alors L_X caractérise la loi de X.

Proposition 26 : soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si L_X est définie au voisinage de 0 alors L_X est analytique au voisinage de 0 et $L_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}[X^n]$ au voisinage de 0

En particulier, $L_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

DEV 2 Application 27 : étude de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ $(a, \lambda > 0)$ de densité $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ dans $\mathbb{R}$.

III - Convergence en loi

1) Définition et caractérisation

Définition 28 : une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une v.a. dans $\mathbb{R}^d$ X si pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^0$ bornée $\mathbb{E}[\phi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\phi(X)]$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ou $\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{P}_X$

Théorème 29 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi (φ_{X_n}) converge simplement vers φ_X

Application 30 : $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

Proposition 31 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ $(a \in \mathbb{R}^d)$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Proposition 32 (lemme de Slutsky) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ $(a \in \mathbb{R}^d)$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$

2) Théorème central limite et application aux statistiques

Théorème 33 (TCL) : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. réelles i.i.d. de carré intégrable, alors $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ (avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$). DEV 3

Application 34 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un échantillon issu d'une loi $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p inconnu. $\hat{p} = \bar{X}_n$ est un estimateur consistant et sans biais de p. Un intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour p est $I_\alpha = \left[\hat{p} - x_\alpha \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p} + x_\alpha \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right]$ ($\alpha \in]0,1[$, $x_\alpha = \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ avec ϕ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$)