261 — Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

On considère X une va sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

I] Définitions et premières propriétés

1) Fonction caractéristique

[B-L] p.61

Def 1 : On appelle fonction caractéristique de X la fonction notée φ_X définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mathbb{P}_X(dx)$.

Rq : φ_X est définie sur tout $\mathbb{R}^d$.

[F-F] p.164

Rq : • Si X est une va de loi discrète $\sum_k p_k \delta_k$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itk}$.

• Si X est une va réelle de densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$.

[F-F] p.165

Ex 2 : • Si $X \sim b(p)$ alors $\varphi_X(t) = 1-p+pe^{it}$.

• Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.

• Si X suit une loi de Laplace de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

[OUV] p.237

• Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien, alors $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(u) = \exp(i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2} {}^t u \Gamma u)$ où $m = \mathbb{E}[X]$, $\Gamma = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$.

[F-F] p.164

Prop 3 :
1) $\varphi_X(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
2) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
3) Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$ alors φ_X est réelle et paire.
4) $\varphi_{AX+b}(t) = \varphi_X(A^*t)e^{i\langle b,t\rangle}$ $\forall b \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
5) φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

[F-F] p.166

Thm 4 :
La fonction caractéristique d'une va caractérise sa loi : si deux va admettent la même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

[B-L] p.63

Thm 5 (Formule d'inversion de Fourier)
Si φ_X est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors X admet une densité continue bornée f_X donnée par :
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\varphi_X(t)dt$.

[B-L] p.64

Appli 6 : $X \sim \mathcal{E}(1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Thm 5 pour la loi de Laplace : $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt$.
D'où $\varphi_X(t) = e^{-|x|}$.

2) Transformée de Laplace

[B-L] p.66

Def 7 : On appelle transformée de Laplace de X la fonction L_X définie par $L_X(s) = \mathbb{E}[e^{\langle s,X\rangle}]$ pour les valeurs de s telles que $e^{\langle s,X\rangle}$ est intégrable.

[OUV] p.162

Ex 8 : • Si $X \sim b(p)$, $L_X(s) = 1-p+pe^s$ pour $s \in \mathbb{R}$
• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $L_X(s) = e^{\lambda(e^{\lambda}-1)}$ pour $s \in \mathbb{R}$.
• Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $L_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ pour $s \in]-\infty, \lambda[$.

[F-F] p.169

Rq : L_X est toujours définie en 0 et vérifie $L_X(0) = 1$.
Il existe des va pour lesquelles L_X n'est définie qu'en 0 : pour $X \sim \mathcal{C}(1)$ par exemple.

Prop 9 :
1) Si X est bornée alors L_X est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$.
2) Si X est à valeurs réelles positives, L_X est continue et bornée sur $]-\infty; 0]$.
3) Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$ alors L_X est paire.

[F-F] p.160

Thm 10 :
La transformée de Laplace d'une va caractérise sa loi.

Appli 11 : Etude de la loi gamma : $\Gamma(a, \lambda)$. $\boxed{\text{DVP}}$

III Moments et indépendance

1) Moments

[OUV] p.204

Prop 12 :
Soit X va réelle.
- Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ alors φ_X est de classe C^n et $\forall 1 \leq k \leq n$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.
En particulier $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.
- Inversement, si φ_X est k-fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{k}{2}\right]$, donnée par la formule ci-dessus.

Ex 13 : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Prop 12 $\Rightarrow$ φ_X dérivable et on trouve $\varphi_X'(t) = -t\varphi(t)$.
Donc $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
On a alors : Si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_Y(t) = e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$.

[B-L] p.68

Rq : Les moments ne caractérisent pas la loi en général :
$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z = e^X$ de densité $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} e^{-(\ln z)^2/2} \mathbb{1}_{]0;\infty[}(z)$
$a \in [-1;1]$, Z_a de densité $f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi \ln x))$, $x > 0$.
Z et Z_a ont les mêmes moments mais pas même loi.

[B-L] p.65

Cor 14 :
Si φ_X est analytique, alors la loi de X est caractérisée par ses moments.

[B-L] p.66

Prop 15
Soit X une va réelle telle que e^{tX} est intégrable pour t dans un intervalle ouvert contenant 0. Alors L_X est définie sur un intervalle ouvert contenant 0. De plus elle est analytique sur un voisinage de 0, sur lequel on a : $L_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]$.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$.

2) Indépendance

[OUV] p.200-202

Prop 16 :
Soient X, Y des va à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$.
$X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$

La fonction caractéristique s'obtenant par $\varphi_X(t) = \varphi_{(X,Y)}(t,0)$ et $\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,s)$, on obtient un second critère d'indépendance :

Prop 17 :
$X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_{(X,Y)}(t,0)\varphi_{(X,Y)}(0,s)$

Ex 18 : $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ de loi de Laplace : $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
$Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_1 + X_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$
$\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{1+t_1^2} \cdot \frac{1}{1+t_2^2}$
$\varphi_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1+t_2, -t_1+t_2) = \frac{1}{1+(t_1+t_2)^2} \cdot \frac{1}{1+(-t_1+t_2)^2}$
$\Rightarrow \varphi_{Y_1}(t_1) = \frac{1}{(1+t_1^2)^2}$, $\varphi_{Y_2}(t_2) = \frac{1}{(1+t_2^2)^2}$
$Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_2$ car $\varphi_{(Y_1,Y_2)}(1,1) \neq \varphi_{Y_1}(1)\varphi_{Y_2}(1)$

Thm 19 :
Soient X, Y deux va indépendantes. Alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

[F-F] p.163

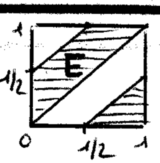
Cte-ex 20 : $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y = X$.
$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

Ex 21 :
- Si $X \sim B(n,p)$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)^n = (1-p+pe^{it})^n$ où $Y \sim b(p)$.
- La somme de va de loi normale indépendantes suit une loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \perp\!\!\!\perp X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$
$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

[F-F] p.160

Thm 22 :
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t)$
- $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $L_{(X,Y)}(t,s) = L_X(t)L_Y(s)$.

[F-F] p.161 **Cte-ex 23** : (X,Y) de densité $f(x,y)=\begin{cases} 2 \text{ si } (x,y)\in E \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$



$L_{X+Y}(s) = L_X(s)L_Y(s)$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

Ex 24 : $X \sim B(n,p)$, $Y \sim b(p)$.
$L_X(s) = L_Y(s)^n = (1-p+pe^s)^n \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Appli 25 : Lois composées.
(X_i) iid de loi $b(p)$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Alors $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

III Convergence en loi

1) Définition et caractérisation

[B-L] p.122 **Def 26** : Soit $(X_n)_n$ une suite de va. On dit que X_n converge en loi vers X si $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ en tout point de continuité de F_X (fonction de répartition). On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Def 27 (définition équivalente à la Def 26)
(X_n) converge en loi vers X si $\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$ pour toute fonction g continue bornée.

Thm 28 (Levy)
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

[B-L] p.132 **Appli 29** : Loi faible des grands nombres L^1.
Soit $(X_n)_n$ suite de va iid L^1.
Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

[OUV] p.310 **Appli 30** : (Théorème de Poisson)
Soit $(X_n)_n$ suite de va de loi $B(n,p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$.
Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Ex 31 : Si $m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ et $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$, alors pour $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Thm 32 : [COT] p.150
Si les X_i admettent des transformées de Laplace sur un intervalle I contenant 0, alors :
$\forall t \in I$, $L_{X_n}(t) \longrightarrow L_X(t)$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

2) Théorème central limite

Thm 33 : (TCL) $\boxed{\text{DVP}}$ [B-L] p.136
$(X_n)_n$ suite de va iid L^2.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.
Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Appli 34 : Détermination d'un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre d'une Bernoulli.

Références
[F-F] : Foata, Fuchs, Calcul des probabilités, 2ème édition
[B-L] : Barbe, Ledoux, Probabilité
[OUV] : Ouvrard, Probabilités 2, 3ème édition
[COT] : Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre, Exercices de probabilités

Etude de la loi gamma

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

Référence : Marie Cottrell, Valentin Genon-Catalot, Christian Duhamel, Thierry Meyre, *Exercices de probabilités*, Cassini, p83-84+163+121-123

Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(a, \lambda)$, de densité

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Rappels

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x$ et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

Calcul de $\mathbb{E}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^a \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^a}{\lambda^a} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\
&= \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)} \\
&= \frac{a}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathrm{Var}(X)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{a+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^{a+1}}{\lambda^{a+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\
&= \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \Gamma(a)} \\
&= \frac{a(a+1)}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Calcul de la transformée de Laplace L_X de X.

$$L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x$$

lorsque cette intégrale existe. L'intégrande est intégrable en 0 car $e^{(t-\lambda)x}x^{a-1} \sim x^{a-1}$ avec $a-1 > -1$.

En $+\infty$, l'intégrande n'est intégrable que pour $t-\lambda < 0$, donc L_X est définie sur $]-\infty, \lambda[$. On a alors, pour $t < \lambda$, en effectuant le changement de variables $x = \frac{u}{\lambda - t}$,

$$L_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^u \frac{u^{a-1}}{(\lambda-t)^{a-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a.$$

Calcul de la fonction caractéristique φ_X de X.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x.$$

Montrons que L_X peut se prolonger en une fonction holomorphe F sur $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < \lambda\}$. Pour $z \in D$, on pose

$$F(z) := \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(z-\lambda)x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x.$$

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur D et que $F(it) = \varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Appliquons le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. On pose $g(x,z) := e^{(z-\lambda)x}x^{a-1}$, on a alors

- pour tout $z \in D, x \mapsto g(x,z)$ est mesurable ;
- pour tout $x > 0, z \mapsto g(x,z)$ est holomorphe sur D ;
- soit $\varepsilon > 0$, pour $x > 0$ et $z \in D$ tel que $\Re(z) < \lambda - \varepsilon$, on a

$$|g(x,z)| = e^{(\Re(z)-\lambda)x}x^{a-1} \leq e^{-\varepsilon x}x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

On en déduit que F est bien définie et holomorphe sur D. On a bien par ailleurs $F(it) = \varphi_X(t)$.

D'autre part, pour tout $z \in D, \Re(\lambda - z) > 0$, donc on peut écrire $(\lambda - z)^a = e^{a \mathrm{Log}(\lambda - z)}$ avec Log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. La fonction G définie sur D par

$$G(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^a$$

est ainsi holomorphe et prolonge également la fonction L_X sur D.

Finalement, F et G coïncident sur $]-\infty, \lambda[$ donc, par le principe de prolongement analytique, $F = G$ sur D, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = F(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a.$$

Théorème central limite

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

<u>Référence</u> : Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, p540+555 de la 4ème édition.

Théorème 1 (Theorème central limite).

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid dans L^2.
On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) > 0$. Alors on a :

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration. Quitte à considérer les variables aléatoires $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$ on peut supposer $m = 0$ et $\sigma = 1$.
On cherche donc à montrer que $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite. Pour cela, on va utiliser le théorème de Lévy : on va montrer

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \underset{n}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

car si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_N(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ car les va X_i sont iid.

De plus, comme X_1 est dans L^2, par théorème on en déduit que φ est de classe C^2 et on connait ses dérivées en fonctions des moments de X_1 : $\varphi'(0) = im = 0$, $\varphi''(0) = -\sigma^2 = -1$. On peut donc écrire un développement de Taylor de φ à l'ordre 2 en l'origine :

$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi''_{X_1}(0) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit alors :

$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

On voudrait maintenant passer à la limite quand n tend vers l'infini, mais la quantité à l'intérieur de la parenthèse n'est pas réelle (une fonction caractéristique est à valeurs complexes, c'est caché dans le $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ici). Nous allons donc utiliser le lemme suivant qui traite le cas complexe :

Lemme 1.

Pour toute suite de complexes $(z_n)_n$ convergeant vers $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} e^z.$$

En appliquant le lemme à l'expression trouvée pour $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ on obtient :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Démonstration du lemme. Par la formule du binôme de Newton on a

$$e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k}.$$

De plus on a l'égalité

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n-j}{n}\right) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

donc

$$e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_n^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{z_n^k}{k!}\left(1-\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right).$$

Comme $1-\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \geq 0$ on en déduit alors

$$\begin{aligned}
\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z_n|^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{|z_n|^k}{k!}\left(1-\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right) \\
&= e^{|z_n|} - \left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n \\
&= e^{|z_n|} - e^{\left(n\log\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)\right)} \\
&\underset{(\star)}{\leq} e^{|z_n|} - e^{n\left(\frac{|z_n|}{n}-\frac{|z_n|^2}{2n^2}\right)} \\
&= e^{|z_n|}\left(1-e^{\left(-\frac{|z_n|^2}{2n}\right)}\right) \\
&\underset{(\star\star)}{\leq} \frac{|z_n|^2}{2n}e^{|z_n|}
\end{aligned}$$

($\star$) et ($\star\star$) découlant à chaque fois d'une simple étude de fonction.

Cette inégalité nous permet alors de conclure car :

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)\right| \leq |e^z - e^{z_n}| + \left|e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)\right| \leq |e^z - e^{z_n}| + \frac{|z_n|^2}{2n} e^{|z_n|}$$

avec le terme de droite tendant vers 0 puisque la suite (z_n) converge vers z et qu'elle est alors bornée. $\square$

<u>**Application**</u> : calcul d'intervalle de confiance asymptotique.

Modèle de la proportion de piles dans n jets d'une pièce : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid de loi $b(p)$. On cherche à estimer le paramètre p.
D'après le théorème central limite on a :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Donc en notant $\bar{X_n} = \frac{S_n}{n}$ on a :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X_n} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

De plus, la loi faible des grands nombres donne : $\sqrt{\bar{X_n}(1-\bar{X_n})} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}$.
Donc par le théorème de Slutsky on a finalement :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X_n} - p)}{\sqrt{\bar{X_n}(1-\bar{X_n})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, en notant q le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (ie $\mathbb{P}(N \leq q) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$) on a :

$$\mathbb{P}\left(-q \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X_n} - p)}{\sqrt{\bar{X_n}(1-\bar{X_n})}} \leq q\right) \simeq \mathbb{P}(N \leq q) - \mathbb{P}(N \leq -q) = 2\mathbb{P}(N \leq q) - 1 = 1 - \alpha$$

pour n assez grand.
Donc pour n assez grand, p est dans l'intervalle $\left[\bar{X_n} - \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X_n}(1-\bar{X_n})}; \bar{X_n} + \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{X_n}(1-\bar{X_n})}\right]$ avec une probabilité proche de $1-\alpha$.
En pratique on prend souvent $\alpha = 0.05$ et dans ce cas $q = 1,96$.