On fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

I Fonction caractéristique et transformée de Laplace

1- Définitions et premières propriétés

Déf 1 : Soit X une v.a réelle. On définit $D_X = \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty\}$ et $G_X : t \in D_X \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$. G_X est appelée la transformée de Laplace associée à X. [FF] p.153.

Remarque 2 : G_X est toujours définie en 0 mais on peut avoir $D_X = \{0\}$.
Cette définition s'étend aux v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Exemples 3 :
- $X \sim b(p)$, $G_X(t) = q + pe^t$, $D_X = \mathbb{R}$.
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $G_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $D_X =]-\infty, \lambda[$.
- $X \sim \mathcal{C}(1)$, $D_X = \{0\}$.
- X a pour densité $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $D_X =]-\infty, 0]$.

Prop 4 : Soit X une v.a réelle. Alors :
- $G_X(0) = 1$. D_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si X est bornée, G_X est définie continue sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \geq 0$, G_X est continue sur $\mathbb{R}_-$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $G_{aX+b} : t \mapsto e^{bt} G_X(at)$. [FF] p.153

Déf 5 : Soit X une v.a réelle. On définit sa fonction caractéristique par $\varphi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$. [FF] p.164

Remarque 6 : φ_X est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{itX}| = 1$.
Cette définition s'étend aux v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par $t \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle})$.

Exemples 7 : [FF] p.165
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\varphi_X : t \mapsto e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.
- $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X : t \mapsto e^{-t^2/2}$.
- $X \sim \mathcal{C}(1)$, $\varphi_X : t \mapsto e^{-|t|}$.

Prop 8 : Soit X une v.a réelle. [FF] p.164
- $\forall t \in \mathbb{R} : |\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$. [O] p.196-197
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : \varphi_{aX+b} : t \mapsto e^{ibt} \varphi_X(at)$.
- φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Thm 9 (Admis) : La transformée de Laplace caractérise la loi d'une v.a. Il en est de même pour la fonction caractéristique. [FF] p.160 [O] p.201

2- Liens avec l'indépendance

Prop 10 : Soient X, Y deux v.a réelles. $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(t)$. [O] p.205

Prop 11 : Soient X, Y deux v.a réelles indépendantes. Alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$. [O] p.207

Remarque 12 : Les propositions 10 et 11 sont également valables pour la transformée de Laplace.

Exemples 13 :

. $X_1, \dots, X_n \sim b(p)$ indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \gamma(n, \lambda)$.

. $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ avec $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

[FF] p.166 **Contre-exemple 14 :** Si $X, Y \sim \mathcal{C}(1)$ avec $X = Y$ alors $\varphi_X : t \mapsto e^{-|t|}$ et $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

[O] p.133 **Application 15 :** Inégalité de Hoeffding. (X_n) une suite de v.a réelles indépendantes, bornées p.s et centrées. On suppose que $|X_n| \leq c_n$ p.s avec $c_n > 0$. En posant $S_n = X_1 + \dots + X_n$, il vient pour tout $\varepsilon > 0$ (DEV)

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{i=1}^{n} c_i}\right).$$

II Lien avec les moments

[O] p.209 **Thm 16 :** Soit X une v.a réelle.

1. Si X admet un moment d'ordre n, φ_X est de classe C^n et pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$
$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(i^k X^k e^{itX})$.

2. Si φ_X est k-fois dérivable en 0, avec $k \geq 2$, X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et ils sont donnés par
$$\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \, \mathbb{E}(X^p) \qquad 1 \leq p \leq 2\lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor.$$

Thm 17 : Soit X une v.a réelle telle que $\mathring{I}_X$ contient 0. Alors pour tout entier non nul k, X admet un moment d'ordre k et sur un voisinage de 0 : [FF] p.162

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k.$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$, $G_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

Exemple 18 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} : G_X(t) = e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2^k k!} t^{2k}$$

Ainsi, pour tout entier naturel k :

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{(-1)^{2k} (2k)!}{2^k k!}, \quad \Rightarrow \text{pas } (-1)$$

$$\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0.$$

III Notion de convergence en loi

1- Convergence en loi

Pour X une v.a réelle, on note F_X sa fonction de répartition.

[FF] p.205 **Définition 19 :** Soient (X_n) une suite de v.a réelles et X une v.a réelle. (X_n) converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$, lorsqu'en tout point x de continuité de F_X, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_X(x)$.

[O] p.303 [FF] p.206 **Exemples 20 :**

. $X_n \sim \delta_{1/n}$, $X \sim \delta_0$, $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$.

. $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} 0$.

[FF] p.207

Thm 21 (Lévy) (Admis) :
1. Soit (X_n) une suite de v.a qui converge en loi vers une v.a X. Alors la suite (φ_{X_n}) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers φ_X.
2. Soit (X_n) une suite de v.a telle que (φ_{X_n}) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction φ continue en 0. Alors φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

[Can] p.278

Contre-exemple 22 : Soit $X_n \sim \mathcal{N}(0,n)$. $\varphi_{X_n}(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et si $t \neq 0$, $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, (X_n) ne converge pas en loi.

2. Le théorème Central Limite

[O] p.325
[FF] p.241

Thm 23 (Théorème Central Limite) :
Soit (X_n) une suite de v.a iid de carré intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soient également $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

(DEV)

[FF] p.246

Remarque 24 : réciproquement, si on considère (X_n) une suite de v.a. réelles iid telle que $X_1 \in L^1$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$ vérifiant de plus $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$, alors $X_1 \in L^2$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$.

Application 25 : Détermination d'intervalles de confiance.

Application 26 :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2}.$$

Références :

[FF] : Foata-Fuchs, Calcul des probabilités, Dunod, 3e édition.
[O] : Ouvrard, Probabilité 2, Cassini,
[Can] : Candelpergher, Théorie des probabilités, une introduction élémentaire, Calvage & Mounet

Inégalité de Hoeffding

Alexandre Bailleul - Paul Alphonse

Réf : [O2] Ouvrard, *Probabilités 2 - Maîtrise, agrégation*, p.132-135

L'inégalité de Hoeffding est une inégalité de type « grandes déviations »qui mesure la vitesse à laquelle la probabilité qu'une moyenne du type loi des grands nombres s'écarte de la moyenne tend vers 0.

Théorème 1 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, centrées et telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |X_n| \leq c_n$ avec $c_n > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Démonstration : Commençons par montrer le résultat suivant.

Lemme 1 *Soit X une variable aléatoire centrée et bornée par 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Démonstration : Soit t dans $\mathbb{R}$. Par convexité de la fonction exponentielle on a

$$\forall x \in [-1,1], \exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t).$$

En introduisant les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique on a donc

$$\forall x \in [-1,1], \exp(tx) \leq \cosh(t) + x\sinh(t).$$

On a

$$ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 2^n n! \leq (2n)!$. (Il suffit de remarquer que le quotient $\frac{(2n)!}{n!}$ est le produit de n entiers supérieurs à 2)

Finalement on a donc

$$\forall x \in [-1,1], \exp(tx) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + x\sinh(t)$$

d'où en passant aux espérances (car tout est positif et X est à valeurs dans $[-1,1]$) on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \sinh(t)\mathbb{E}(X).$$

Enfin, comme X est centrée on a bien

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

□

Soient $\varepsilon > 0$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon).$$

Nous n'allons étudier que la première quantité ci-dessus, car si X vérifie les hypothèses du lemme 1 alors $-X$ aussi et on obtiendra les mêmes majorations.

Soit t dans $\mathbb{R}$. On a, par croissance de la fonction exponentielle et l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(tS_n > t\varepsilon) = \mathbb{P}(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(tS_n)}{\exp(t\varepsilon)}.$$

Utilisant la définition de S_n et l'indépendance des X_i on obtient

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(tX_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(tX_i)).$$

Soit i dans $\{1, ..., n\}$. La variable aléatoire $\frac{X_i}{c_i}$ est centrée et à valeurs dans $[-1,1]$, on peut donc lui appliquer le lemme 1. Posons $t_i = tc_i$, on a donc

$$\mathbb{E}(\exp(tX_i)) = \mathbb{E}\left(\exp\left(t_i\frac{X_i}{c_i}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}c_i^2\right).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$$

et ceci pour t quelconque.

Cherchons maintenant le minimum de la fonction $t \mapsto -t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $t \mapsto t\sum_{i=1}^n c_i^2 - \varepsilon$ qui s'annule en $\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$. Ainsi le minimum du polynôme de degré 2 à coefficient dominant positif ci-dessus est atteint en $\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

Finalement on obtient

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Comme les majorations fonctionnent également pour les variables aléatoires $-X_i$ on obtient de même

$$\mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

et finalement on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

□

TCL et réciproque

Alexandre Bailleul - Paul Alphonse

Réf : [FF] Foata-Fuchs, *Calcul des probabilités*, p. 246-247
[O2] Ouvrard, *Probabilités 2 : maîtrise, agrégation*, p. 323-326

Le théorème central limite est un des théorèmes les plus importants en probabilités et en statistiques. En voici une démonstration, ainsi que la démonstration d'une réciproque de celui-ci.

Théorème 1 (TCL et réciproque) *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles iid intégrables et centrées. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) La suite de variable aléatoires $Z_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
ii) $X_1 \in L^2$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$.

Démonstration : L'énoncé *ii)* $\Rightarrow$ *i)* n'est rien d'autre que le TCL (« théorème central limite »). On en donne une démonstration à partir du lemme classique suivant :

Lemme 1 *Soit X une variable aléatoire réelle L^2. Alors φ_X admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par*

$$\varphi(t) = 1 + it\mathbb{E}(X) - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2) + o(t^2).$$

Démonstration : Soit x un réel. La formule de Taylor avec reste intégral aux ordres 2 et 3 donnent respectivement

$$\exp(ix) = 1 + ix - x^2\int_0^1 (1-u)\exp(iux)du$$

et

$$\exp(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-u)^2\exp(iux)du.$$

⚠ log peut être complexe donc il faut faire attent°.

exp +1 - 1 puis $| \; | \leq | \; | + | \; |$

On en déduit

$$|\exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})| \leq \left|-x^2 \int_0^1 (1-u)(\exp(iux) - 1)\right| du \leq x^2$$

et

$$|\exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})| \leq \left|-i\frac{x^3}{2} \int_0^1 (1-u)^2 \exp(iux) du\right| \leq \frac{|x^3|}{6},$$

i.e.

$$|\exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})| \leq \min\left(x^2, \frac{|x^3|}{6}\right).$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x = tX$ puis passage à l'espérance à justifier.

$$\left|\varphi_X(t) - (1 + it\mathbb{E}(X) - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2)\right| \leq t^2\mathbb{E}\left(\min\left(X^2, |t|\frac{|X^3|}{6}\right)\right).$$

Finalement, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\min\left(X^2, |t|\frac{|X^3|}{6}\right) \leq X^2 \in L^1,$$

on obtient par convergence dominée que

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left(\min\left(x^2, |t|\frac{|x^3|}{6}\right)\right) = 0.$$

□

Remarque : On peut également obtenir ce développement limité de φ_X en utilisant le fait qu'elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (sous-entendu si le développement semble trop long, zapper ce lemme). Il faut cependant faire attention car le petit o est a priori complexe, et le passage à la limite dans la suite de la démo est plus dur à justifier.

Revenons à la démonstration de *ii)* ⇒ *i)*. Comme les X_i sont iid, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

En appliquant le lemme précédent on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, à X_1

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(Y_n) - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}(Y_n^2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$Y_n ? = X_1 ?$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,$$

Lemme $\left|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $|a_i|, |b_i| \leq 1$ (à admettre)

$$\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}[X^2]\right)^n\right| \leq \sum_{i=1}^n \left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2)\right)\right|$$

ne dépend pas de i

$| \; | < 1$ pour n assez grand.

$$\leq n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \mathbb{E}\left[\min\left(X^2, \frac{t}{\sqrt{n}}\frac{|X|^3}{6}\right)\right] \longrightarrow 0$$

$= \mathbb{E}(X_1)$

? où l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ est nulle car les X_i sont centrées et l'espérance $\mathbb{E}(Y_n^2)$ est égale à 1 par indépendance des X_i et par hypothèse sur $\mathbb{E}(X_1^2)$.

Finalement un développement limité de l'expression précédente mise sous forme exponentielle donne pour tout $t \in \mathbb{R}$ —▷ pas possible car $o(\ )$ peut être complexe

$$\varphi_{Z_n}(t) \to_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Le théorème de Paul Lévy permet de conclure que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Montrons maintenant $i) \Rightarrow ii)$. Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 2 *Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ. On a*

$$\lim_{u \to 0} 2\frac{1 - \Re\varphi_X(u)}{u^2} = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

Démonstration : Pour tout $u \neq 0$, on a

série entière ⊕ critère des séries alternées —▷

$$2\frac{1 - \Re\varphi_X(u)}{u^2} = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(ux)}{u^2} \mu(dx).$$

Par le lemme de Fatou on a —▷ on doit justifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \frac{1-\cos ux}{u^2} \leq \frac{x^2}{2}$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) \leq \liminf_{u \to 0} 2\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(ux)}{u^2} \mu(dx) \leq \limsup_{u \to 0} 2\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(ux)}{u^2} \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx)$$

ce qui prouve le résultat. □

15min —▷ pour Alexandre.

Lemme 3 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X + Y \in L^2$. Alors $X \in L^2$ et $Y \in L^2$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $X \in L^2$ par symétrie des rôles de X et de Y. On a

$$\mathbb{E}((X+Y)^2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}((X+y)^2) \mu(dy) < +\infty$$

donc pour μ-presque tout $y \in \mathbb{R}$, et donc pour au moins un $y \in \mathbb{R}$, $X + y \in L^2$ ce qui prouve que $X \in L^2$. □

Nous pouvons maintenant démontrer que $i)$ implique $ii)$. Plaçons-nous d'abord dans le cas où la loi de X_1 est symétrique, ce qui implique que $\varphi_{X_1} = \overline{\varphi_{X_1}}$ et donc que φ_{X_1} est réelle. En développant comme dans la première partie de la preuve on a en particulier

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Z_n}(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

car la convergence en loi implique la convergence simple des fonctions caractéristiques.
établie au réel.

Pour n assez grand on a donc $\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ d'où en passant aux logarithmes $\lim_{n\to+\infty} n \log\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{1}{2}$, ce qui implique

dvlp limité à l'ordre 1 de $\log\left(1+\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)\right)$ puis $\times n$. équivalents de même limite

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n}.$$

Par le lemme 9 on a donc

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{P}_{x_1}(dx) = \lim_{n\to+\infty} 2n\left(1 - \varphi_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1.$$

Dans le cas général, il suffit de remarquer que la suite de variables aléatoires définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{(X_1 - X_2) + \ldots + (X_{2n-1} - X_{2n})}{\sqrt{2n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X_1 + X_3 + \ldots + X_{2n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{X_2 + X_4 + \ldots + X_{2n}}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Comme les variables aléatoires $\frac{(X_{2i-1} - X_{2i})}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes, centrées et de même loi symétrique, on en déduit avec le cas précédent que

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 1,$$

d'où

$$\mathbb{E}(X_1^2) = 1.$$

$\square$