261

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire — Exemples et applications

Cadre : On considère X ... $(\Omega, \ldots)$ un espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{R}$

I - Définition et propriétés

[F-F] p164 <u>Def 1</u> : On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X, la fonction de la variable réelle t définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\,\mathbb{E}[\sin(tX)]$$

<u>Rq 2</u> : La fonction caractéristique d'une variable aléatoire est la transformée de Fourier de sa loi de probabilité.

<u>Rq 3</u> : 1) Si X est une variable aléatoire de loi discrète $\sum_k p_k \delta_k$, alors $\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itk}$

2) Si X est une variable aléatoire de densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx$

[MEL] p154 <u>Rq 4</u> : Si **X** est une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^n$, sa fonction caractéristique est la fonction φ_X de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}]$ où $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

<u>Ex 5</u> :
- Si $X \sim b(p)$ alors $\varphi_X(t) = pe^{it} + 1 - p$
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$

[F-F] p164, 165 <u>Prop 6</u> : 1) φ_X est une fonction définie et continue pour tout réel t.

2) φ_X est bornée et on a : $\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi_X(t)| \leq \varphi(0) = 1$.

3) φ_X est une fonction hermitique : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

4) Si φ_X est réelle, alors elle est paire.

5) Si la loi de X est symétrique, i.e : $\mathcal{L}(-X) = \mathcal{L}(X)$ alors φ_X est une fonction réelle, donc paire.

6) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$

<u>Rq 7</u> : De façon analogue, on peut écrire les propriétés 1 à 5 de la prop. 6 en dimension n.

<u>Rq 8</u> : En dimension n, la propriété 6 de la propo s'écrit : Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, si $b \in \mathbb{R}^m$ et si A est une matrice $m \times n$, nous avons : $\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t, b\rangle}\varphi_X({}^tAt)\ \forall t \in \mathbb{R}^m$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A. p155

<u>Ex 9</u> : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors φ_X est paire. En effet, la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est évidemment symétrique.

<u>Ex 10</u> : $X = (X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien si et seulement si sa fonction caractéristique s'écrit : $\varphi_X(t) = e^{i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Ct\rangle}\ \forall t \in \mathbb{R}^n$ où $m = \mathbb{E}[X]$ (i.e : $m_j = \mathbb{E}[X_j]$ pour $1 \leq j \leq n$), $m \in \mathbb{R}^n$ et C est la matrice de covariance de X (i.e : $C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$)

<u>Thm 11 (admis)</u> : φ est une fonction caractéristique si et seulement si : [G-S] chap V

1) $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$

2) φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

3) φ est de type positif, c'est-à-dire $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, $\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{j,k} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geq 0$

<u>Prop 12</u> : La fonction caractéristique φ_X caractérise la loi de la variable aléatoire X. Ainsi, si deux variables X et Y ont même fonction caractéristique, ils ont même loi. [MEL] p157

<u>Thm 13</u> : (Formule d'inversion de Fourier) [B-L] p63

Soit φ_X la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X, supposée intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors la loi de X admet une densité continue bornée f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : DEV

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

<u>Rq 14</u> : généralisation sur $\mathbb{R}^n$: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t, x\rangle}\varphi_X(t)\,dt$$

<u>Application 15</u> : Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ densité de la loi dite de Laplace $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et donc $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}\,dt$. En changeant [B-L] p64

II - Indépendance et Moments

1) Indépendance

[F-F] p166 **Thm 16 :** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes. Alors, pour tout réel t, on a :
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \qquad (*)$$

Rq 17 : Il existe des couples de variables aléatoires non indépendantes qui, néanmoins vérifient $(*)$

[F-F] p167 **C-ex 18 :** Soit $X \sim C(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$; le couple (X,Y) où $Y=X$ montre : $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \left(e^{-|t|}\right)^2 = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

[F-F] p167 **Corollaire 19 :** 1) Le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.

2) Soient (φ_K) $(K\geq 0)$ une suite de fonctions caractéristiques et (α_K) $(K\geq 0)$ une suite de nombres positifs, de somme 1. Alors $\sum_{K\geq 0} \alpha_K \varphi_K$ est une fonction caractéristique.

3) Si φ est une fonction caractéristique, il en est de même de $\overline{\varphi}$, $|\varphi|^2$, $Re(\varphi)$. Si en outre, φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire absolument continue, il en est de même de $\overline{\varphi}$, $|\varphi|^2$.

[F-F] p171 **Thm 20 :** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la fonction caractéristique est notée $\varphi_{(X,Y)}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X et Y sont indépendantes
2) $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\varphi_{(X,Y)}(u,v) = \varphi_{(X,Y)}(u,0)\varphi_{(X,Y)}(0,v) = \varphi_X(u)\varphi_Y(v)$

Rq 21 : généralisation sur $\mathbb{R}^n$: $X = (X_1, \dots, X_n)$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si
$$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_X(t) = \varphi_X(t_1, 0, \dots, 0) \dots \varphi_X(0, \dots, 0, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1)\dots\varphi_{X_n}(t_n).$$

Ex 22 : Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien où $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\forall t \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_X(t) = e^{i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Ct\rangle}$ où $m = \mathbb{E}[X]$ et C est une matrice diagonale (c'est la matrice de la)

2) Moments et dérivabilité

[F-F] p16 **Thm 23 :** Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X. Supposons qu'il existe un entier $n\geq 1$ tel que $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$, alors :

1) φ_X est continûment dérivable jusqu'à l'ordre n inclus,
2) pour tout $K = 0, 1, \dots, n$ on a : $\varphi_X^{(K)}(0) = i^K \mathbb{E}[X^K]$
3) φ_X peut être représentée par la formule de Taylor :
$$\varphi_X(t) = \sum_{K=0}^{n} \frac{(it)^K}{K!}\mathbb{E}[X^K] + o(|t|^n) \text{ lorsque } t \to 0$$

[Ouv] p2 **Thm 24 :** Soit X une v.a réelle et soit φ_X sa fonction caractéristique. S'il existe un entier $n\geq 1$ tel que $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$, alors on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \sum_{K=0}^{n-1} \frac{(it)^K}{K!}\mathbb{E}[X^K] + \frac{(it)^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{ituX} du\right]$

[F-F] p166 **Ex 25 :** $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, φ_X est dérivable et $\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t)$. Donc $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$

[B-L] p65 **Rq 26 :** En général, une loi n'est pas caractérisée par ses moments. Toutefois, si φ_X est analytique, la loi est caractérisée par ses moments.

[Ouv] p2 **Thm 27 :** Si φ_X est K-fois dérivable en 0 $(K\geq 2)$ alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{K}{2}\right]$ et ils sont donnés par la formule 2) du Thm 23.

Ex 28 : Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{K\in\mathbb{Z}} a_K \delta_K$ symétrique (i.e : $a_K = a_{-K}$), et telle que $\sum_{K\in\mathbb{N}} K a_K = +\infty$. Sa fonction caractéristique φ_X est dérivable partout mais X n'a pas de moment.

III - Convergence

1) Convergence en loi et théorème de Paul Lévy

[MEA] p166 **Def 29 :** Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle de fonctions de répartition respectives $(F_n)_n$ et F. On dit que X_n converge en loi

[MEL] p165 **Prop 30 :** $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

[OUV2] p299 **Thm 31 : (Théorème de Paul Lévy).**
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Alors la suite $(\varphi_n)_n$ des fonctions caractéristiques converge uniformément vers la fonction caractéristique de X φ_X sur tout intervalle fini.

[OUV2] p299 **Thm 32 : (Théorème de Paul Lévy)**
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires, soit $(\varphi_n)_n$ la suite des fonctions caractéristiques associées.
Supposons que $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers la fonction φ de partie réelle continue en 0. Alors :
1) φ est une fonction caractéristique donc il existe une loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ d'une variable aléatoire X dont φ est la fonction caractéristique.
2) $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

Ex 33 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ dans les cas suivants :
1) $X_n \sim \mathcal{B}(m, p_n)$, $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $p_n \to p$
2) $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $m_n \to m$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$
3) $X_n \sim \mathcal{P}(\theta_n)$, $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ et $\theta_n \to \theta$
4) $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $\lambda_n \to \lambda$

[MEL] 167 **Lemme 34 : (Lemme de Slutsky)**
Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires.
Supposons que $(X_n)_n$ converge en loi vers X et que $X_n - Y_n$ converge vers 0 en probabilité.
Alors $(Y_n)_n$ converge en loi vers X.

2) Applications

Thm 35 : Théorème central limite [MEL] p170 DEV
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_i]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ pour $1 \le i \le n$
Alors on a : $\dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Application 36 : (Théorème de Moivre-Laplace) [MEL] p171
Si $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ ($S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i \sim b(p)$ et les X_i sont indépendantes pour $1 \le i \le n$), alors :
$\dfrac{S_n - np}{\sqrt{n(p(1-p))}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Application 37 : détermination d'un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre p d'une loi de Bernoulli $b(p)$.

Thm 38 : (Théorème des évènements rares de Poisson)
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une famille finie $\{A_{n,i} \mid 1 \le i \le M_n\}$ d'événements indépendants.
On pose $p_{n,i} = \mathbb{P}(A_{n,i})$ et $S_n = \sum_{i=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,i}}$.
On suppose : $\max_{1 \le i \le M_n} p_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum_{i=1}^{M_n} p_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$.
Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Références :

[F-F] : Foata, Fuchs
[B-L] : Barbe, Ledoux
[OUV2] : Ouvrard 2
[MEL] : S. Méléard
[G-S] : Grimmet et Stirzaker

Inversion de la transformée de Fourier

Leçons : ***234, 235, 239, 240, 261***

[Ouv2], section 12.3

Rappels :

1. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$, on définit : $\widehat{\mu} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,t\rangle}\, d\mu(x) \end{array}\right.$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, si $g(y-.)$ est μ-intégrable, on définit $(g \star \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y-x)\, d\mu(x)$.

Théorème

Soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$ et telle que $\widehat{\mu} \in L^1(\lambda)$.
Alors $\mu \ll \lambda$ et sa densité (au sens de Radon-Nikodym) est : $h(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(t) e^{-i\langle x,t\rangle}\, dt$.

Prérequis

- Pour $\sigma > 0$, $g_\sigma : x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^d \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de probabilité.
- On a : $\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{g_1}(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^d g_1(t)$.
- Par convergence dominée : $\forall f \in \mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^d\right), \forall x \in \mathbb{R}^d, (f \star g_\sigma)(x) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.

Démonstration :

Étape 1 : On va montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^d, (g_\sigma \star \mu)(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(v) g_1(\sigma v) e^{-i\langle y,v\rangle}\, dv$.

Comme g_σ et μ sont bornées, on a bien : $\forall y \in \mathbb{R}^d, g_\sigma(y-.) \in L^1(\mu)$.
De plus, $g_\sigma(y-x) = g_\sigma(x-y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^d \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^d g_1\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)$.
Par un changement de variable, on obtient ensuite :

$$g_\sigma(y-x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(z) \exp\left(i\left\langle \frac{x-y}{\sigma}, z\right\rangle\right) \frac{dz}{\sigma^d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v) \exp(i\langle x-y, v\rangle)\, dv$$

Donc $(g_\sigma \star \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v) \exp(i\langle x-y, v\rangle)\, dv d\mu(x)$.

Or $|g_1(\sigma v) \exp(i\langle x-y,v\rangle)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \exp\left(-\frac{\sigma^2\|v\|2}{2}\right)$ est intégrable par rapport à $\lambda \otimes \mu$ car μ est bornée et $v \mapsto \exp\left(-\frac{\sigma^2\|v\|^2}{2}\right) \in L^1(\lambda)$.
On applique Fubini :

$$(g_\sigma \star \mu)(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v) e^{-i\langle y,v\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,v\rangle}\, d\mu(x) dv = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v) e^{-i\langle y,v\rangle} \widehat{\mu}(v) dv$$

Étape 2 : Montrons que $\mu \ll \lambda$.

Soit $f \in \mathcal{C}_K\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a : $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\sigma\to 0} (f \star g_\sigma)(x)\, d\mu(x)$.
On applique le théorème de convergence dominée, car :

$$|(f \star g_\sigma)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g_\sigma(y)\, dy\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, |g_\sigma(y)|\, dy \leqslant \|f\|_\infty \in L^1(\mu) \text{ car } \mu \text{ est bornée.}$$

On a donc : $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} (f \star g_\sigma)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g_\sigma(x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(x)$.
On applique Fubini, car $|f(y)g_\sigma(x-y)| \leqslant |f(y)|\,\|g_\sigma\|_\infty$ est $\mu \otimes \lambda$-intégrable.
Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g_\sigma(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y = \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(y-x)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,(g_\sigma \star \mu)(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Mais on a :

$$|f(y)\,(g_\sigma\star\mu)(y)| = |f(y)|\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \widehat{\mu}(v) g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,v\rangle}\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{|f(y)|}{(2\pi)^d}\,\|\widehat{\mu}\|_1$$

qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Ainsi, par convergence dominée :

$$\forall f \in \mathcal{C}_\mathrm{K}\left(\mathbb{R}^d\right), \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\lim_{\sigma\to 0}(g_\sigma\star\mu)(y)\,\mathrm{d}y$$

On a donc bien $\mu \ll \lambda$.

Étape 3 : La relation précédente nous donne : $h(x) = \lim_{\sigma\to 0}(g_\sigma\star\mu)(x)$.

Ainsi : $h(x) = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\mu}(v)g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}v$.

Or $\left|\widehat{\mu}(v)g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d |\widehat{\mu}(v)| \in \mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Donc $h(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\mu}(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}v$. ∎

Références

[Ouv2] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 2*, 3e éd., Cassini, 2009.

Chapitre 37

Théorème central limite

Références : Ouvrard, *Probabilités 2*, p323

[illegible]

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. *iid* de carré intégrable. On note $m = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X)$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme des X_n. On a alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad .$$

Quitte à recentrer et réduire les variables, on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. La démonstration va utiliser le théorème de Paul Lévy. On note φ_n la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et on va montrer que la suite $(\varphi_n)_n$ converge vers la fonction caractéristique de la loi normale.

• **Étape 1 :** Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes de modules inférieurs à 1, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \quad .$$

Le résultat est évident pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| &\leqslant \left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i\right| + \left|a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| \\
&\leqslant |a_{n+1}|\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + \left|\prod_{i=1}^{n} b_i\right| |a_{n+1} - b_{n+1}| \\
&\leqslant \left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + |a_{n+1} - b_{n+1}|
\end{aligned}$$

Par récurrence on a le résultat.[1]

• **Étape 2 :** Soit X une v.a. $\mathbb{L}^2$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\varphi_X(t) - \left(1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2]\right)\right| \leqslant t^2\mathbb{E}\left[\min\left(X^2, |t|\frac{|X^3|}{6}\right)\right] \quad .$$

1. pas de référence, c'est à connaître par ♡ ...

D'après la formule de *Taylor-Laplace* à l'ordre 1, pour tout réel x, on a :

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)e^{iux}\mathrm{d}u \\
e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right) &= -x^2 \int_0^1 (1-u)[e^{iux} - 1]\mathrm{d}u \\
\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| &\leqslant x^2
\end{aligned}
$$

De même, en poussant la formule à l'ordre 2, pour tout réel x, on a :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-u)^2 e^{iux}\mathrm{d}u$$

$$\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|x^3|}{6}$$

On a donc la majoration suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant \min\left(x^2, \frac{|x^3|}{6}\right)$. On obtient le résultat en appliquant cette inégalité à tX et on effectue l'inégalité de Jensen ($x \mapsto |x|$ est convexe).

• **Étape 3 :** Application à φ_n.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\varphi_n(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$, par propriétés sur les fonctions caractéristiques (somme de v.a. indépendante et multiplication par une constante). D'après les deux étapes précédentes, on a :

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| &= \left|\left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \\
&\leqslant n\left|\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\right| \\
&\leqslant n\frac{t^2}{n}\mathbb{E}\left[\min\left(X^2, \frac{|t|}{6\sqrt{n}}|X^3|\right)\right]
\end{aligned}
$$

D'après le théorème de convergence dominée (dont les hypothèses sont vérifiées) on a :

$$\left|\varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

En outre, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad .$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad .$$

Le théorème de Paul Lévy permet de conclure.

Adapté du travail de Baptiste Huguet.