# 261 Loi d'une variable aléatoire. Exemples et applications

Cadre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

## I Définitions et premières propriétés

### 1- Loi d'une variable aléatoire

**déf 1** Soit $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (E,\mathcal{E})$ une variable aléatoire, on appelle loi de $X$, la mesure image de $\mathbb{P}$ par $X$, définie par : $\mathbb{P}_X : \mathcal{E} \to [0,1]$
$A \to \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}_X(A)$
$\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité

**déf 2** Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ au plus dénombrable alors $X$ est une v.a. discrète. Dans ce cas $\mathbb{P}_X = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X=x_n)\delta_{x_n}$

**exc 3** $* X \sim \mathcal{B}(p)$ : $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ $\quad * X\sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\delta_k$

$* X\sim Bin(n,p)$ : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\delta_k$ $\quad * X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$

$* X\sim \mathcal{G}(p)$ : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$

**thm 4** (Radon Nikodym) Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace probabilisable, $\mu$ et $\nu$ deux mesures $\sigma$-finies telles que $\nu \ll \mu$, alors il existe $f$ mesurable positive unique $\mu$-pp telle que : pt $A\in\mathcal{F}$, $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$. On note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$

**déf 5** Si $X$ est une v.a de loi $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue, alors on dit que $X$ est de densité $f_X = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda}$

**exc 6** $* X \sim \mathcal{U}([a,b])$ : $f_X(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\frac{1}{b-a}$ $\quad * X\sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $f_X(x) = \frac{e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$

$* X\sim \mathcal{E}(\alpha)$ : $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

$* X \sim \Gamma(a,\alpha)$ : $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\alpha^a e^{-\alpha x} x^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

**exc 7** $X$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ suit la loi $\mathcal{N}(m,\Gamma)$ si sa densité est
$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det\Gamma}}\exp\left(-\frac{1}{2}{}^t(x-m)\Gamma^{-1}(x-m)\right)$, $x\in\mathbb{R}^d$

**rem 8** Il existe des variables aléatoires qui ne sont ni discrètes ni à densité.

### 2- Loi conjointe, lois marginales

**déf 9** Soit $X = (X_1,\dots,X_n) : (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ on appelle loi conjointe de $(X_1,\dots,X_n)$ la mesure $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $\mathbb{P}_X(B_1\times\dots\times B_n) = \mathbb{P}(X_1\in B_1,\dots,X_n\in B_n)$ pt $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On appelle lois marginales de $X$, les lois des v.a réelles $X_1,\dots,X_n$.

**prop 10** La loi conjointe $\mathbb{P}_X$ permet de calculer les lois marginales par : pt $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_{X_n}(A) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}\times A\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R})$. La réciproque est fausse en général.

**C-ex 11** Soit $X=(X_1,X_2)$ de loi $\mathbb{P}_X = \frac{1}{4}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,1)}$ et $Y=(Y_1,Y_2)$ de loi $\mathbb{P}_Y = \frac{1}{2}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,1)}$ alors $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{Y_1}$, $\mathbb{P}_{X_2} = \mathbb{P}_{Y_2}$ mais $\mathbb{P}_X \neq \mathbb{P}_Y$.

**déf 12** $X_1,\dots,X_n$ v.a réelles sont dites mutuellement indépendantes si la loi de $X=(X_1,\dots,X_n)$ est la loi produit : $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1}\otimes\dots\otimes\mathbb{P}_{X_n}$.

### 3- Espérance et moments

**déf 13** Soit $X$ une v.a sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ tq $X\in L^1(\Omega)$. On appelle espérance de $X$ la quantité $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X\,d\mathbb{P}$.

**thm 14** (de transfert). Soit $X$ v.a à valeurs dans $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne. $\Phi(X)\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ssi $\Phi\in L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\mathbb{P}_X)$ et dans ce cas on a :
$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_\Omega \Phi\circ X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x)\,d\mathbb{P}_X(x)$

**rem 15** $X$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} x\,d\mathbb{P}_X(x)$

**déf 16** $X$ v.a admet un moment d'ordre $p>0$ si $\mathbb{E}[|X|^p]<\infty$, on note $\mathbb{E}[X^p]$ son moment.

**rem 17** En général la loi d'une v.a n'est pas caractérisée par ses moments.

**C-ex 18** $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, $Z = e^X$ de densité : $f_Z(x) = (2\pi)^{-1/2}x^{-1}e^{-(\ln x)^2/2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$
$Z_a$ v.a de densité $f_{Z_a}(x) = f_Z(x)(1+a\sin(2\pi\ln(x)))$ pour $a\in[-1,1]$.
$Z_a$ et $Z$ ont mêmes moments mais $f_Z \neq f_{Z_a}$.

## II Outils caractérisant la loi d'une variable aléatoire

**thm 19** (d'unicité du prolongement) Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace mesurable, $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$ stable par intersection finie telle que $\Omega\in\mathcal{C}$ et $\mu,\nu$ deux mesures $\sigma$-finies vérifiant $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ pt $n\in\mathbb{N}$. Si $\mu$ et $\nu$ coïncident sur $\mathcal{C}$ alors $\mu=\nu$ sur $\sigma(\mathcal{C})$

## 1- Fonction de répartition X v.a réelle.

**def 20** On appelle fonction de répartition de X, la fonction $\mathbb{F}_X$ définie par:

$$\mathbb{F}_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$t \longmapsto \mathbb{P}(X\le t) = \mathbb{P}_X(]-\infty,t])$$

**prop 21** i) $\mathbb{F}_X$ est croissante, positive, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point

ii) $\lim_{t\to-\infty} \mathbb{F}_X(t)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\mathbb{F}_X(t)=1$   iii) $\mathbb{F}_X(t)\in[0,1]$ pt $t\in\mathbb{R}$.

**rem 22** une fonction vérifiant i), ii), iii) est la fonction de répartition d'une v.a. réelle.

**thm 23** $\mathbb{F}_X$ caractérise la loi de X : ie $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$ ssi $\mathbb{F}_X=\mathbb{F}_Y$.

**ex 24** $X\sim\mathcal{E}(1)$, soit $X_a=\min(X,a)$ pour $a>0$. Alors $\mathbb{F}_{X_a}(t)=\begin{cases}1-e^{-t} & \text{si } 0<t<a\\ 1 & \text{si } t\ge a\end{cases}$

et $\mathbb{P}_{X_a}=e^{-a}\delta_a+\mu$ où la mesure $\mu$ a pour densité $x\mapsto e^{-x}\mathbb{1}_{]0,a[}(x)$.

**coro 25** pt $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[\phi(X)]$ caractérise la loi de X.

**prop 26** une fonction de répartition admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

**prop 27** Si X est à densité alors $\mathbb{F}_X$ est continue en tout point. On a alors $\mathbb{F}_X(x)=\int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ et $F_X$ est dérivable en tout point de continuité de $f_X$.

**prop 28** Si X est discrète alors $\mathbb{F}_X$ est discontinue en les points tels que $\mathbb{P}(X=x_n)>0$.

**ex 29** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$, $M_n=\max_{1\le i\le n}(X_i)$

alors $\mathbb{F}_{M_n}(k)=(\mathbb{F}_{X_1}(k))^n$ et $\mathbb{P}(M_n=k)=(\mathbb{F}_{X_1}(k))^n-(\mathbb{F}_{X_1}(k-1))^n$

**App 30** (paradoxe de Bertrand) $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, MN une corde de C. Si la corde est choisie au hasard, la longueur de cette corde est une v.a. X. On ne peut trouver la loi de X si l'on ne précise pas comment on choisit la corde au hasard.

## 2- Fonction caractéristique

**def 31** Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est:

$$\varphi_X : \mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$t\longrightarrow\mathbb{E}[e^{i\langle t;X\rangle}]$$

**thm 32** $\varphi_X$ caractérise la loi de X ie : $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)$ pt $t\in\mathbb{R}^d$ ssi $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

Si de plus X v.a réelle, on a pour tout réels $a<b$:

$$\mathbb{P}_X(]a,b])=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt-\frac{\mathbb{P}(X=a)-\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

**ex 33** $X\sim B(n,p)$ : $\varphi_X(t)=(pe^{it}+1-p)^n$   $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma)$ : $\varphi_X(t)=e^{imt}e^{-\sigma^2t^2/2}$

$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ : $\varphi_X(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

**prop 34** X v.a réelle, on a:

- $\varphi_X$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi_X(0)=1$ et pt $t\in\mathbb{R}$ $\varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)}$ et $|\varphi_X(t)|\le 1$
- pt $\alpha\in\mathbb{R}$ $\varphi_{\alpha X}(t)=\varphi_X(\alpha t)$
- Si $X_1,X_2,\dots,X_n$ v.a réelles indépendantes alors $\varphi_{X_1+\dots+X_n}=\varphi_{X_1}\cdots\varphi_{X_n}$
- $p>0$, si $X\in L^p(\Omega)$ alors $\varphi_X\in C^p(\mathbb{R})$ et pt $k\le p$ $\varphi_X^{(k)}(0)=i^k\mathbb{E}[X^k]$

d'où le DL à l'ordre p de $\varphi_X$ en 0: $\varphi_X(t)=1+\sum_{k=1}^{p}(it)^k\frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!}+o(t^p)$

- $X\in L^1(\Omega)$ ssi $\varphi_X\in C^1(\mathbb{R})$

**rem 35** Si $\varphi_X$ est dérivable en 0, X n'est pas nécessairement dans $L^1$

**C-ex 36** X v.a de loi $\mathbb{P}_X=\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}}\frac{C}{n^2\ln(|n|)}\delta_n$. C constante de normalisation

$\varphi_X=2C\sum_{n\ge2}\frac{\cos(nt)}{n^2\ln(|n|)}$, $\varphi_X'(0)=0$ mais $X\notin L^1(\Omega)$.

**ex 37** Soit X et Y v.a indépendantes

- $X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(m,p)$ : $X+Y\sim B(n+m,p)$
- $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, $X\sim\mathcal{P}(\mu)$ : $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$
- $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma)$, $Y\sim\mathcal{N}(m',\sigma')$ : $X+Y\sim\mathcal{N}(m+m',\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$

**lem 38** Soit X v.a réelle, pt $b\in\mathbb{R}$ on a: $\mathbb{P}(X=b)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-ibt}\varphi_X(t)dt$.

**thm 39** (formule d'inversion) Si X est une v.a telle que $\varphi_X\in L^1(\mathbb{R})$ alors X possède une densité continue donnée par: $f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-ixt}\varphi_X(t)dt$.

**rem 40** une v.a X qui possède une densité n'a pas nécessairement une fonction caractéristique intégrable sur $\mathbb{R}$.

**C-ex 41** $X\sim\mathcal{E}(1)$ $\varphi_X=\frac{1}{t^2+1}+i\frac{t}{t^2+1}$   $\varphi_X\notin L^1(\mathbb{R})$

**App 42** (Régularisation par convolution). X v.a sans densité. On peut approcher X par une v.a à densité de la forme $X+\varepsilon Z$ où $\varepsilon>0$ et Z une v.a indépendante de X telle que $\varphi_Z\in L^1(\mathbb{R})$.

## 3- Fonction génératrice d'une v.a à valeurs dans ℕ.

**def 43** X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ on appelle fonction génératrice de X la fonction:

$$G_X : [-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$z\longmapsto\sum_{n\ge0}\mathbb{P}(X=n)z^n=\mathbb{E}[z^X]$$

ex 44 - $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ : $G_X(z) = (pz+1-p)^n$ - $X \sim \mathcal{G}(p)$ : $G_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ : $G_X(z) = \exp(\lambda(z-1))$

thm 45 $G_X$ caractérise la loi de $X$. ie $G_X = G_Y$ ssi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

prop 46 Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

thm 47 $X$ v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ ; $\mathbb{E}[X]$ est finie ssi $G_X$ est dérivable à gauche en 1 et l'on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) = G_X'(1)$.

rem 48 Si $G_X$ est $k$ fois dérivable en 1 on a : $G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\times\cdots\times(X-k+1)]$.

## III Convergence en loi et comportements asymptotiques

### 1- Convergence en loi $X_n$ v.a réelle

def 49 : $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vers $\mu$ si pt $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a :

$\int_{\mathbb{R}} h\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} h\, d\mu$ on note : $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$.

rem 50 $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ n'implique pas que $\mu_n(B) \longrightarrow \mu(B)$ pt $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

c.ex 51 $\delta_{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0$ mais $\delta_{1/n}(]0,1]) = 1 \not\longrightarrow 0 = \delta_0(]0,1])$.

def 52 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi ssi $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathbb{R}$ en particulier $X_n \xrightarrow{Loi} X$ ssi $\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}_X$

rem 53 une suite de v.a discrètes peut converger en loi vers une v.a à densité et inversement.

ex 54 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\mathbb{P}_{X_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\delta_{\frac{k}{n}}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a $X$ de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$

- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a $X$ de loi discrète $\delta_0$

prop 55 $g$ continue sur $\mathbb{R}$. Si $(X_n) \xrightarrow{Loi} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{Loi} g(X)$.

thm 56 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi ssi $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction de répartition $F$ en tout point de continuité de $F$. ie : $X_n \xrightarrow{Loi} X$ ssi $F_{X_n} \xrightarrow{cvs} F_X$ en tout point de continuité de $F_X$

thm 57 $X_n \xrightarrow{Loi} X$ implique $\varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$ sur $\mathbb{R}$.

thm 58 (Lévy) Si $\varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$ où $\varphi_X$ continue en 0 alors $X_n \xrightarrow{Loi} X$.

c-ex 59 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $X_n \sim \mathcal{N}(0,n)$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\neq 0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$ non continue en 0.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi. La convergence simple de $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne suffit pas pour en déduire la convergence en loi.

### 2- Lois des grands nombres.

thm 60 (loi faible) $(X_n)_{n\geq 1} \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ i.i.d d'espérance $m$. Soit $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ alors $Y_n \xrightarrow{Loi} Y$ où $Y$ est la v.a constante égale à $m$.

thm 61 (loi forte) $(X_n)_{n\geq 1} \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ i.i.d d'espérance $m$ alors $Y_n \xrightarrow{p.s} Y (=m)$

App 62 $f$ fonction continue sur $[0,1]$. Calcul de : $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots$

lem 63 pt $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp z$.

thm 64 (central-limite) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)^{\mathbb{N}}$ iid d'espérance $m$, de variance $\sigma^2 > 0$ la suite : $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. De plus, pt $a, b \in \mathbb{R}$ on a : $\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right) \leq b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$

App 65 calcul de $\lim_{n\to\infty} \int_n^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx$.


REF - OUVRARD : probabilités 1 & 2

- CALOT : cours de calcul des probabilités
- MÉLÉARD : aléatoire, introduction à la théorie et au calcul des probabilités
- LEDOUX : probabilité