261

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cadre : On se place dans $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I/ Notions de base en probabilité.

a) Loi d'une variable aléatoire.

Def 1 : On appelle variable aléatoire (v.a) une fonction mesurable X de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ dans un espace mesurable $(B,\mathcal{B})$.

* si $(B,\mathcal{B})=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, on parle de vecteur aléatoire
* si $n=2$, on dira couple aléatoire et si $n=1$, v.a. réelle. (v.a.r)

Def 2 : Soit X une v.a.r. La loi (de probabilité) de X est la mesure image sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{P}$ par X :

$$\mathbb{P}_X : \begin{vmatrix} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto \mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(X^{-1}(A)) \end{vmatrix}$$

Ex 3 : - La mesure $\mathbb{P}$ est la loi de la v.a identité.
- Si $\mathbb{P}:=\frac{1}{3}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{6}\delta_1$ et $X:\omega\in\mathbb{R}\mapsto|\omega|\in\mathbb{R}_+$. Alors $X(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}_X=\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1$.

b) Moments d'une v.a. : espérance et variance

Def 4 : X v.a.r. lorsque $\int_\Omega |X(\omega)|\,d\mathbb{P}(\omega)<+\infty$, on définit l'espérance $\mathbb{E}[X]$ de X par $\mathbb{E}[X]:=\int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$, et $\mathbb{E}[X]=(\mathbb{E}[X_1],\dots,\mathbb{E}[X_n])$ si $X=(X_1,\dots,X_n)$.

rmq 5 : On notera dorénavant $X\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, $p\geq1$, pour $\int_\Omega X^p(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)<+\infty$.

Thm 6 (Transfert) : Soit X un vecteur aléatoire et h une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $h(X)\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \iff h\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathbb{P}_X)$ et,

$$\mathbb{E}[h(X)]=\int_\Omega h(X(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,d\mathbb{P}_X(x).$$

Ex 7 : $\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\in A\}}]$.

App 8 : (Weierstraß) Soient $a<b\in\mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 9 : Si X v.a.r, $X\in\mathcal{L}^1$, alors $\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} x\,d\mathbb{P}_X(x)$.

Déf 10 : Si $X\in\mathcal{L}^p$, on définit le moment d'ordre $p\geq1$ de X par

$$\mathbb{E}[X^p]:=\int_{\mathbb{R}} x^p\,d\mathbb{P}_X(x).$$

Def 11 : Si $X\in\mathcal{L}^2$, la variance est le moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{V}[X]:=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2].$$

rmq 12 : l'espérance hérite des propriétés de l'intégrale

Prop 13 : Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $X\in\mathcal{L}^2$ v.a.r :
- $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$;
- $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$;
- $\mathrm{Var}(X)=0 \iff X=\mathbb{E}[X]$ p.s.

Thm 14 (Borel-Cantelli) : Soit $(A_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n)=0$

c) Variables aléatoires : discrètes \ à densité.

Def 15 : Une v.a X est dite discrète si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Prop 16 : La loi d'une v.a discrète est entièrement caractérisée par les probabilités atomiques $p_i:=\mathbb{P}(X=x_i)$, (avec $X(\Omega)=\{x_i\mid i\in I\}$).

$$\forall A\subset\mathbb{R},\ \mathbb{P}_X(A)=\sum_{i \text{ t.q } x_i\in A} p_i=\sum_{i\in I} p_i\,\delta_{x_i}(A).$$

Ex 17 : 1) Si $A\subset\Omega$, $\mathbb{1}_A$ est une v.a à valeur dans $\{0,1\}$.

2) (loi de Bernoulli; $Ber(p)$) X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (noté $X \sim Ber(p)$) si $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$, i.e $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.

3) (loi Binomiale, $\mathcal{B}(n,p)$) On procède à $n \in \mathbb{N}$ répétitions indépendantes d'une $Ber(p)$ et on compte le nombre k de succès. Alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

4) (loi géométrique, $\mathcal{G}(p)$) On procède à des répétitions indép. d'une $Ber(p)$ et on s'arrête dès que l'on obtient un succès.
La probabilité d'obtenir $k-1$ échecs suivi d'un succès est de $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k$.

5) (loi de Poisson) On dit que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si
$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, où $k \in \mathbb{N}$.
c'est la probabilité qu'il existe k occurrences d'un processus pendant un laps de temps donné, si le nombre moyen d'occurrence pendant ce laps de temps est de λ.

6) (loi de Rademacher) Cette loi correspond au gain d'un jeu de pile et face (non truqué) dans lequel la mise est de 1:
$\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Def 18: Une v.a X est dite à densité s'il existe $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ mesurable t.q $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$.

rmq 19: la loi ne charge pas les points de $\mathbb{R}^d$.

prop 20: Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à densité.
on a $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

Ex 21: Voir tableau p.4: $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mathcal{C}(a)$, $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

d) Indépendance de v.a

Def 22: La loi du couple de v.a (X,Y) est appelée loi conjointe. notée $\mathbb{P}_{(X,Y)}$. Les lois de X et Y sont appelées lois marginales: $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$

rmq 23 On obtient les lois marginales par intégration partielle de $\mathbb{P}_{(X,Y)}$

Def 24: Deux v.a.r X, Y sont indépendantes (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) ssi, $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:
$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \iff \mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y.$$

prop 25: $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall f, h$ mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. $\mathbb{E}[f(X)h(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \times \mathbb{E}[h(Y)]$

II/ Caractérisations via les fonctions.

a) Fonction de répartition

Def 26: La fonction de répartition (f.d.r) d'une v.a.r X est la fonction
$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \in [0,1]$.

prop 27: 1) F_X est croissante et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
2) F_X est càdlàg (continue à droite, admet une limite à gauche)
3) F_X est continue en x ssi $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

prop 28: Si X v.a.r à densité, alors F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_X(x) = F_X'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Fonction caractéristique

Def 29: X v.a.r. La fonction caractéristique de X est la fonction
$\phi_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$

prop 30: · Si X v.a discrète, alors $\phi(t) = \sum_n p_n e^{itx_n}$
· Si X v.a à densité, alors $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\,dx$

Thm 31: 1) $\phi_X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; 2) ϕ_X est bornée, $|\phi_X(t)| \leq \phi(0) = 1$;
3) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$ 4) $a, b \in \mathbb{R}$: $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$

5) Si $X \sim -X$, alors ϕ_X est paire.

6) Toute combinaison convexe de fct caractéristiques est une fonction caractéristique.

7) Soit (X,Y) couple de v.a.r tq $X \perp\!\!\!\perp Y$. Alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

C-ex 32 : si $X \sim \mathcal{C}(1)$, alors $\phi_X(t) = e^{-|t|}$, on a bien $\phi_{X+X} = \phi_X \phi_X$ mais pas $X \perp\!\!\!\perp X$.

Thm 33 : Soit (X,Y) deux v.a. dans $\mathbb{R}^n$. $\phi_X = \phi_Y \Rightarrow X \sim Y$.

prop 34 : si X v.a.r admet un moment d'ordre p, alors ϕ_X est p-fois dérivable et $\phi_X^{(p)}(t) = i^p \mathbb{E}[X^p e^{itX}]$. En part. $\phi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$

c) Fonction génératrice.

Def 35 : Soit X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fct $G_X : z \in [-1,1] \longmapsto \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=n) z^n$.

Ex 36 : voir tableau p.4.

prop 37 : • G_X détermine la loi de X : $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\partial^n G_X(0)}{n!}$

• Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

III/ Théorèmes limites.

a) Convergence en loi.

Def 38 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$ lorsque, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Ex 39 : $X_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$ converge en loi vers $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ si $\sigma_n^2 \xrightarrow[n]{} \sigma^2$.

prop 40 : Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.n de lois $\mathcal{B}(n,p_n)$.
Si $np_n \xrightarrow[n]{} \lambda > 0$, alors $S_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

b) Loi des grands nombres.

Def 41 : On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si : $\mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$, on notera alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

prop 42 : $X \in L^2$. $\forall \varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

prop 43 : Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r i.i.d, d'espérance $m>0$. Alors, $\underline{\lim}_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq 0$

Thm 44 (LFGN) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d d'espérance $m \in \mathbb{R}$. On a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} m$.

DEV 1

c) Théorème central limite

Thm 45 (Lévy) : Si $\phi_{X_n} \xrightarrow[n]{} \phi_X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Thm 46 (TCL) : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d de carré intégrables, alors
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1)).$$

lemme 47 : Soit X v.a.r centrée, bornée par 1 (p.s). Alors $\mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

Thm 48 (Hoeffding) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r indépendantes bornées (p.s) et centrées ; on suppose que $|X_n| \leq c_n$ $\mathbb{P}$-p.s, avec $c_n > 0$. On note $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$:
$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right).$$

appli 49 : Soit $\alpha > 0$. Si $\exists \beta > 0$ tq $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$ alors :
$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n]{p.s} 0.$$

DEV 2

Nom	Définition	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}[X]$	$G_X(t)$
$Ber(p)$	$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
$Bin(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p}{1-qt}$, où $q=1-p$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$
$\mathcal{U}(⟦1,n⟧)$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$ si $k=1,\dots,n$.	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$G_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{n}\frac{1-t^n}{1-t} & \text{si } t\neq 1 \\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$

<u>tableau lois discrètes</u>

Nom	Définition (densité)	$E[X]$	$V[X]$	$\phi_X(t)$
$\mathcal{U}([a,b])$ $a<b$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
$\mathcal{C}(a)$	$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$	existe pas	$+\infty$	$e^{-a\lvert t\rvert}$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

<u>tableau lois à densité</u>