On considère ici des v.a. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

I) Définitions et propriétés générales [Cô]

A) Modes de convergence

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.

Déf 1 : Convergence presque sûre (p.s.) :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X \iff \mathbb{P}(X_n \underset{n\to+\infty}{\to} X) = 1$$

Déf 2 : Convergence en probabilité ($\mathbb{P}$) :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \iff \forall \varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Déf 3 : Convergence dans L^p $(1 \leq p < +\infty)$:

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X \iff \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Déf 4 : Convergence en loi ($\mathcal{L}$) :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mathcal{C}^0 \text{ bornée}, \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

Remarques : Les topologies de la convergence en loi et en probabilité sont métrisables. La convergence presque sûre n'est pas issue d'une topologie.

- Pour $(L^p, \|\cdot\|_p)$ (où $\|X\|_p = \mathbb{E}(|X|^p)$) on a :

Théorème 5 (Riesz-Fischer) : L^p est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.

- **Théorème 6 :**

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et X v.a. dans L^p t.q. $X_n \xrightarrow{L^p} X$.
Alors il existe une ss-suite extraite $(X_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. :

(i) $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s.} X$

(ii) $\exists Y$ v.a. dans L^p t.q. $|X_{\varphi(n)}| \leq Y$ p.s., $\forall n\in\mathbb{N}$.

Propriété 7 : $\forall q \geq p \geq 1$, on a $L^q \subset L^p$ et

$$X_n \xrightarrow{L^q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

B) Convergence en proba et liens entre les CV.

Propriété 8 : On a les implications suivantes :

(i) cv. L^1 $\Rightarrow$ cv. $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ cv. $\mathcal{L}$

(ii) cv. p.s. $\Rightarrow$ cv. $\mathbb{P}$

(iii) cv. $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ $\exists$ une ss-suite cv. p.s.

(iv) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ (cste), alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Remarque : $\boxed{\text{Cf. schéma à la fin}}$

Définition 9 : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *uniformément intégrable* si :

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(|X_n|\, \mathbb{1}_{\{|X_n|>a\}}\right)\right) = 0$$

Remarque : $X_n \xrightarrow{L^1} X \Rightarrow (X_n)$ unif. intégrable.

Propriété 10 : $\left(X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \text{ et } (X_n) \text{ unif. intégrable}\right) \Rightarrow \left(X_n \xrightarrow{L^1} X\right)$.

Théorème 11 (Loi faible des grands nombres) :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.

Alors $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

- **Application : Théorème de Bernstein :** si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors f est la limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales : $\displaystyle P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

II) Convergence presque sûre et applications.

A] Évènements asymptotiques

Si $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de tribus, on appelle tribu de queue la tribu $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}, \dots)$

Un évènement de $\mathcal{C}$ est appelé évènement asymptotique.

Exemple : Si $A_n \in \mathcal{B}_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\overline{\lim_n} A_n$ est asymptotique.

Propriété 12 (loi du 0-1) : Si les tribus $\mathcal{B}_n$ sont indépendantes et si A est un évènement asymptotique, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

Théorème 13 (Borel-Cantelli)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.

(i) Si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = 0$

(ii) Si les A_n sont indépendants, et si $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = 1$.

[ME] Application : Si un singe (ou un humain) tape au hasard sur un clavier, alors avec une probabilité 1, il tapera une infinité de fois le livre "À la recherche du temps perdu".

Lemme 14 (Caractérisation de la CV p.s.)
On a $X_n \xrightarrow{p.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\overline{\lim_n}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

B] Applications

Théorème 15 (Loi forte des grands nombres)
Si (X_n) v.a. iid avec $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1).$$

Théorème 16 (Cantelli) : $\boxed{\text{DEV 1}}$
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, centrées et telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tq. $\forall n$, $\mathbb{E}(X_n^4) \leq M$.
Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0$.

Remarque : le cas particulier du th. 16 où les X_i sont iid permet de démontrer la loi forte des grands nombres dans le cas où $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$.

• Application : Méthode de Monte Carlo pour le calcul numérique d'intégrales. [ME]
Soit $f \in L^1([0,1])$ et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de loi uniforme sur $[0,1]$.
Alors $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n}$
où la limite est p.s.

Intérêts : – vitesse de convergence stable p/r à la dimension (lorsqu'on généralise sur $[0,1]^d$)
– ne dépend pas de la régularité de f (mesurable)

• Traduction statistique : [CA]
La moyenne empirique $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur consistant (et sans biais) de $m = \mathbb{E}(X_1)$ pour un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

III Convergence en loi et applications.

A Propriétés fondamentales

Caractérisations : Dans la déf 4, on peut remplacer "f $\mathcal{C}^0$ bornée" par "f uniformément $\mathcal{C}^0$ bornée" ou bien "f $\mathcal{C}^0$ tq $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0$".

De plus, si F_n et F sont les fonctions de répartition de X_n et X, on a :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \text{ en tout point de continuité de } F.$$

Théorème 17 ("Continuous mapping") :
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On note D_h l'ensemble des points de discontinuité de h (il est mesurable). Alors :

$$\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \text{ et } \mathbb{P}(X \in D_h) = 0\right) \Rightarrow h(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} h(X).$$

Définition 18 : Soit X une v.a.r.
La fonction caractéristique de X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Propriétés 19 :

(i) $\phi_X = \phi_Y \iff X \sim Y$

(ii) $\phi_X(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}, |\phi_X(t)| \leq 1$

(iii) ϕ_X est uniformément continue

Exemples 20 : $X \sim \mathcal{B}(n, \theta)$: $\phi_X(t) = (1-\theta+\theta e^{it})^n$

$X \sim \mathcal{P}(\theta)$: $\phi_X(t) = e^{\theta(e^{it}-1)}$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Théorème 21 (Lévy) : Soient (X_n) et X des v.a.
Alors : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \ \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t)\right)$

B Applications

Théorème central limite 22 : $\boxed{\text{DEV 2}}$
Si (X_n) iid, $Var(X_1) = \sigma^2 < +\infty$ et $m := \mathbb{E}(X_1)$.
On a alors : $\sqrt{n}(\overline{X_n} - m) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Remarque : Cette convergence caractérise les v.a. L^2.

Théorème 23 (Évènements rares) [OU]
Soit $(A_{n,m})_{n\geq1, m\geq1}$ une famille d'évènements indépendants.
Soit $X_{n,m} = \mathbb{1}_{A_{n,m}} \sim \mathcal{B}(p_{n,m})$ où $p_{n,m} = \mathbb{P}(A_{n,m})$
On suppose que $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ et que $\left(\max_{1\leq m\leq n} p_{n,m}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors $\sum_{m=1}^{n} X_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Lemme 24 (Slutsky) : Soient $(X_n)_{n\geq1}$ et $(Y_n)_{n\geq1}$ des suites de v.a. telles que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} y \in \mathbb{R}$. [CA]
Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (X, y)$.

Application 25 : Statistique de Student

$$\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X_n} - m)}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), \text{ où } S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

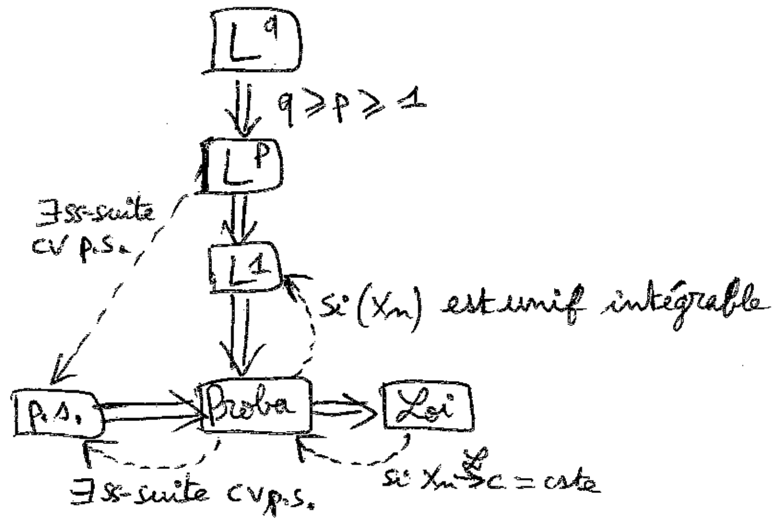
est la variance empirique.

Application 26 : On peut ainsi construire des intervalles de confiance asymptotiques, i.e. tq.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\theta \in I_n) = 1 - \alpha$$

où $\alpha \in]0,1[$ et θ est le paramètre d'intérêt.

Schéma récapitulatif des liens entre les modes de convergence :



* RÉFÉRENCES :

[CO] Cottrell & co, "Ex. de probabilités", Cassini

[ME] Méléard, "Aléatoire", Polytechnique

[BA] Barbe, Ledoux, "Probabilité", EDP Sciences

[CA] Cadre, Vial, "Statistique mathématique", Ellipses

[OU] Ouvrard, "Probabilités 2", Cassini

* Références des DEV :
  - DEV 1 : [CO], p. 153
  - DEV 2 : [BA], p. 136