262 — Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications

[Ouv] p 88 - 92 [BL] p 103

Dans la suite, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X désignent toujours respectivement une suite de v.a. et une v.a. définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

I/ Convergence presque sûre et convergence en probabilité

1) Définition et propriétés

Déf 1 : (X_n) converge presque sûrement vers X ($X_n \xrightarrow{p.s} X$) si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.

Rq 2 : $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} |X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\geq m} |X_n - X_m| \geq \varepsilon) = 0$

Th 3 : (Borel - Cantelli)

1) Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

2) Si les X_n sont mutuellement indépendantes, alors $X_n \xrightarrow{p.s} 0$ ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$.

Contre-ex 4 : Soit $(X_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[})$ définie sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]})$.
$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ $\forall 0 < \varepsilon < 1$ mais $X_n \xrightarrow{p.s} 0$.

Déf 5 : (X_n) converge en probabilité vers X ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Rq 6 : Si (X_n) converge p.s. (resp. en probabilité), la limite X est $\mathbb{P}$-p.s. unique.

Th 7 : 1) La convergence p.s. implique la convergence en probabilité.
2) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, il existe une sous-suite $(X_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge presque sûrement vers X.

Contre-ex 8 : Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes $\frac{1}{n}\delta_1 + (1-\frac{1}{n})\delta_0$.
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \overset{p.s}{\not\to} 0$.

Prop 9 : Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ (resp. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ est continue, alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s} f(X)$ (resp $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$).

Prop 10 : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi (X_n) est de Cauchy pour la convergence en probabilité, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$.

2) Loi des grands nombres et applications

[BL] p132 (admis)

Th 11 : (Loi faible des grands nombres)
Soit (X_n) une suite de v.a. iid admettant un moment d'ordre 1.
Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$.

Th 12 : (Loi forte des grands nombres)
Soit (X_n) une suite de v.a. iid. Les conditions suivantes sont équivalentes : 1) $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$
2) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}[X_1]$.

[Ouv] p123

App 13 : (Méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$, Lebesgue-intégrable sur D. Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indépendantes de loi uniforme sur D. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p.s} \frac{1}{\lambda(D)}\int_D f(u)\,du$.

[HVV] p

App 14 : (Construction d'estimateurs par la méthode des moments)
Soit un n-échantillon $(X_1, \dots X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$ et q fonctions $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ telles que $\mathbb{E}_\theta[|\Phi_j(X_1)|] < +\infty$ $\forall j \in \{1, \dots, q\}$. La méthode des moments consiste à estimer $g(\theta) = \Psi(g_1(\theta), \dots, g_q(\theta))$ où $g_j(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\Phi_j(X_1)]$ par $\hat{g}_n = \Psi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi_1(X_i), \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi_q(X_i)\right)$.
La LGN forte assure que les $\hat{g}_n$ sont fortement consistants.

Ex : - moyenne empirique $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- variance empirique $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$

II / Convergence en norme L^p, $p \geq 1$

[OU2] p

1) Définition et propriétés

Rappel : $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$. $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \|.\|_p)$ où $\|X\|_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p}$ est un espace vectoriel normé.

Déf 15 : X_n converge vers X en norme L^p ($X_n \xrightarrow{L^p} X$) si $\lim_{n \to +\infty} \|X_n - X\|_p = 0$

Rq 16 : Si $1 \leq p \leq q$, cv $L^\infty \Rightarrow$ cv $L^q \Rightarrow$ cv $L^p \Rightarrow$ cv L^1.

Prop 17 : La convergence en norme L^p implique la convergence en probabilité.

Contre-ex 18 : On définit $X_n(\omega) = \omega^{-\alpha} 1\!\!1_{]0,1/n]}(\omega)$ $\forall \omega \in]0,1]$, $\alpha > 0$.
Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \notin L^p$ dès que $\alpha p \geq 1$.

Contre-ex 19 : Soit X_n de loi $(1-n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $p \geq 1$.
Alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ mais $\mathbb{E}(|X_n|^p) = 1$ $\forall n$.

Déf 20 : Une famille de v.a. $(X_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble quelconque est uniformément intégrable (U.i.) si $\lim_{c \to +\infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| \, d\mathbb{P} = 0$.

Ex 21 : Si $|X_i| \leq X$ $\mathbb{P}$-p.s. $\forall i \in I$ où X est une v.a. positive intégrable, alors $(X_i)_{i \in I}$ est U.i. En particulier, une famille finie de v.a. intégrables est U.i.

Prop 22 : $(X_i)_{i \in I}$ est U.i. ssi
1) $(X_i)_{i \in I}$ est bornée dans L^1, i.e. $\sup_{i \in I} \int_\Omega |X_i| \, d\mathbb{P} < +\infty$
et
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \sup_{i \in I} \int_A |X_i| \, d\mathbb{P} < \varepsilon$.

Th 23 (Vitali) : Soient $p \geq 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) $X_n \xrightarrow{L^p} X$
2) La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, i.e. $\lim_{n,m \to +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X_m|^p) = 0$ (en particulier, $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \|.\|_p)$ est complet)
3) La suite $(|X_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est U.i. et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Cor 24 : Soit (X_n) une suite de v.a. de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\exists \delta > 0$ pour lequel (X_n) est bornée dans $L^{p+\delta}$, i.e. $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^{p+\delta}] < +\infty$. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$. [BL] p120

2) Le cas des martingales

[OU2] p 360-370

Déf 25 : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{A}_n] = X_n$

Th 26 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. (X_n) converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. X_∞ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{A}_n]$.

Th 27 : Une martingale bornée dans L^1 converge p.s.

Contre-ex 28 : (X_n) ne converge pas forcément dans L^1 ! Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de loi $\frac{\delta_0 + \delta_2}{2}$ et $Y_n = \prod_{j=0}^{n} X_j$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (Y_n) est une martingale pour la filtration $\mathcal{A}_n = \sigma(X_j \,|\, 0 \leq j \leq n)$, bornée dans L^1 car $\mathbb{E}[|Y_n|] = 1$ $\forall n$. (Y_n) converge p.s vers $Y_\infty = 0$ mais $Y_n \overset{L^1}{\not\to} 0$ puisque $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ $\forall n$.

Th 29 : Soit (X_n) une martingale intégrable. Les assertions suivantes sont équivalentes : 1) (X_n) est U.i.
2) (X_n) converge p.s et dans L^1 vers une v.a. X_∞ $\mathcal{A}_\infty$-mesurable et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{A}_n]$.

App 30 : (Ruine du joueur) (DVP)
Un joueur joue à pile ou face contre la banque avec une fortune initiale de a €. Il gagne 1 € avec proba p lorsqu'il obtient pile, et perd 1 € sinon. Le jeu dure jusqu'à ce que le joueur ou la banque soit ruiné, la banque ayant une fortune initiale de b €. On suppose $p > \frac{1}{2}$. [OU2] p 380
Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ? que le joueur gagne ?
Quelle est la durée moyenne du jeu ?

III / Convergence en loi

1) Définition et résultats importants

[BL] p 121

Déf 31 : Soit (X_n) une suite de v.a. réelles de fonctions de répartition F_n. On dit que X_n converge en loi vers une v.a. X de fonction de répartition F si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(t) = F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que F est continue en t. On note $X_n \Rightarrow X$.

Ex 32 : Soit X_n de loi $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{\{1+\frac{1}{n}\}})$. Alors $X_n \Longrightarrow \mathcal{B}(1/2)$

Prop 33 : $X_n \Rightarrow X$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\phi(X_n)] = \mathbb{E}[\phi(X)]$ pour toute fonction continue bornée $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

dmis)

Th 34 : (Lévy) $X_n \Rightarrow X$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (où φ_X désigne la fonction caractéristique de la v.a. X.

[OU2] p 311

App 35 : (Th des évènements rares de Poisson) Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ une famille finie $\{A_{nj} \mid 1 \leq j \leq M_n\}$ d'évènements indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{nj}) = p_{nj}$ et on note : $S_n = \sum\limits_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{nj}}$. On suppose que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ en croissant, que $\max\limits_{1\leq j \leq M_n} p_{nj} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\sum\limits_{j=1}^{M_n} p_{nj} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ où $\lambda > 0$. Alors $S_n \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

DVP)

Th 36 : (Théorème central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, iid. On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1) > 0$. Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Th 37 : (Continuous mapping theorem) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\mathbb{P}$-ps $X_n \Rightarrow X$. Alors $f(X_n) \Longrightarrow f(X)$.

[OU2] p 306

Th 38 : La convergence p.s et la convergence en probabilité impliquent la convergence en loi.

Contre-ex 39 : Soit $X \sim \mathcal{B}(1/2)$ et $X_n = X$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $X_n \Rightarrow X$. $Y = 1 - X \sim \mathcal{B}(1/2)$ donc $X_n \Rightarrow Y$, mais $|X_n - Y| = |2X - 1| = 1$ $\mathbb{P}$-ps donc $X_n \overset{\mathbb{P}}{\not\longrightarrow} X$.

Prop 40 : Si $X_n \Rightarrow c$, c constante, alors X_n

[OU2] p 335

Th 41 : (Lemme de Slutsky) Si $X_n \Rightarrow X$ (resp $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) et $Y_n \Rightarrow c$, c constante, alors $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$ (resp $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, c)$)

2) Applications en statistiques

[OU2] p 316

App 42 : (Test du chi-2 d'adéquation) On dispose de n réalisations $X_1, \dots, X_n$ indépendantes d'une même loi inconnue P à valeurs dans un ensemble fini E. On veut tester si $P = P^0$ où P^0 est une loi donnée. La statistique du Chi-2 $D_n = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{N_i - np_i^0}{np_i^0}$ "mesure la distance" entre les effectifs N_i observés dans chaque classe C_i (où $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i$) et les effectifs théoriques np_i^0 (où $p_i^0 = \mathbb{P}(X \in C_i)$ si $X \sim P^0$). On a :

$$D_n \begin{cases} \Longrightarrow \chi^2(k-1) & \text{si } P = P^0 \\ \longrightarrow +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Si t_α est tel que $\mathbb{P}(X \geq t_\alpha) = \alpha$ si $X \sim \chi^2(k-1)$, alors $[t_\alpha, +\infty[$ est une zone de rejet au niveau d'erreur α de l'hypothèse $P = P^0$.

App 43 : (Construction d'intervalles de confiance asymptotiques)
On dispose de n réalisations indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m et σ^2 sont inconnus, et on veut estimer m.
D'après le TCL et le lemme de Slutsky, on a $\sqrt{n}\, \frac{\overline{X_n} - m}{\widehat{S_n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ où $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\widehat{S_n}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$.

$\left[\overline{X_n} - t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de m au niveau d'erreur α (si $t_{1-\alpha/2}$ est donné par $\mathbb{P}(X \geq t_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$ si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$)

$$
\begin{tikzcd}
 & L^q \arrow[d, Rightarrow, "q \geq p \geq 1"] & \\
 & L^p \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddl, dashed, "\text{il existe une ss-suite qui cvg p.s.}"'] & \\
 & L^1 \arrow[d, Rightarrow] & \\
p.s \arrow[r, Rightarrow] & \text{proba} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, dashed, bend right, "\text{si } (X_n) \text{ est UI.}"'] \arrow[l, dashed, bend left, "\text{il existe une sous-suite qui cvg p.s.}"] & \text{loi} \arrow[l, dashed, bend left, "\text{si la limite en loi est constante}"]
\end{tikzcd}
$$

références :

- [OU2] : Probabilités 2, Ouvrard
- [BL] : Probabilité, Barbe-Ledoux
- [RIV] : Statistique mathématique en action, Rivoirard-Stoltz
- [COT] : Exercices de probabilités, Cottrell

0.1 Théorème central limite

Référence : Ouvrard 2 p 310-315. **Leçon** : 218, 261, 262.

Lemme 1 : Pour tout nombre complexe z et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|exp(z) - (1 + \frac{z}{n})^n\right| \leq exp(|z|) - (1 + \frac{|z|}{n})^n \qquad (1).$$

Il en résulte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que

$$lim_{n \to \infty}(1 + \frac{z}{n})^n = exp(z).$$

Démonstration. : La formule du binôme donne, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$exp(z) - (1 + \frac{z}{n})^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{z^j}{n^j}$$

En tenant compte de l'égalité

$$\frac{\binom{n}{j}}{n^j} = \frac{1}{j!} \frac{n(n-1)\cdots(n-(j-1))}{n^j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \frac{k}{n})$$

Il vient alors

$$exp(z) - (1 + \frac{z}{n})^n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \left[1 - \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \frac{k}{n})\right] \qquad (2).$$

Puisque $1 - \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \frac{k}{n}) \geq 0$, on a

$$\left|exp(z) - (1 + \frac{z}{n})^n\right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|z|^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{|z|^j}{j!} \left[1 - \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \frac{k}{n})\right].$$

ce qui donne (1) en appliquant (2) pour $|z|$.
Enfin, puisque $ln((1 + \frac{z}{n})^n) = |z| + o(1)$, on a $lim_n(1 + \frac{z}{n})^n = exp(|z|)$. □

Lemme 2 : Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors sa fonction caractéristique ϕ_X admet un développement limité d'ordre deux en 0 donné par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2} E[X^2] + o(t^2).$$

Plus précisément, on a l'inégalité pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\phi_X(t) - (1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2])\right| \leq t^2 E\left[min(X^2, |t|\frac{|X|^3}{6})\right].$$

Démonstration. La formule de Taylor (appliquée à $t \longmapsto exp(itx)$ entre 0 et 1) avec reste intégral écrite à l'ordre 2 donne, pour tout réel x,

$$exp(ix) = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)exp(iux)du$$

soit, puisque $\int_0^1 (1-u)du = \frac{1}{2}$,

$$exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2}) = -x^2 \int_0^1 (1-u)(exp(iux) - 1)du$$

Il en résulte que

$$\left|exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})\right| \leq x^2$$

La même formule de Taylor à l'ordre 3 donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$exp(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-u)^2 exp(iux)du$$

Il en résulte que

$$\left|exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})\right| \leq \frac{|x|^3}{6}$$

Au final, on a

$$\left|exp(ix) - (1 + ix - \frac{x^2}{2})\right| \leq min(x^2, \frac{|x|^3}{6})$$

On a déduit l'inégalité de l'énoncé (en remplaçant x par tX puis en prenant l'espérance) et on conclut à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$\lim_{t \to 0} E\left[min(X^2, \frac{|t||X|^3}{6})\right] = 0$$

de sorte que $t^2 E\left[min(X^2, \frac{|t||X|^3}{6})\right] = o(t^2)$.

□

Théorème [Théorème central limite] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, de même loi (on note i.i.d) et admettant un moment d'ordre 2. Alors la suite de terme général Y_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nE\left[X_1\right]}{\sqrt{nvar(X_1)}}$$

converge en loi vers la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$.

Démonstration. Par indépendance et identique distribution, la fonction caractéristique de Y_n est donnée par

$$\phi_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j - E[X_1]}(\frac{t}{\sqrt{nvar(X_1)}}) = \left[\phi_{t(X_1-E[X_1])}(\frac{1}{\sqrt{nvar(X_1)}})\right]^n$$

Le lemme 2 appliqué à la variable aléatoire $t(X_1 - E\left[X_1\right])$ donne

$$\phi_{t(X_1-E[X_1])}(\frac{1}{\sqrt{nvar(X_1)}}) = 1 + \frac{i}{\sqrt{nvar(X_1)}} \times 0 - \frac{t^2}{2nvarX_1} \times var(X_1) + o(\frac{1}{n}).$$

On obtient donc le développement asymptotique

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right]^n$$

D'après le lemme 1 (Attention $o(\frac{1}{n})$ est un nombre complexe) on a donc

$$lim_{n\to\infty} Y_n(t) = exp(-\frac{t^2}{2})$$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Par le théorème de Levy on a donc $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)$.

□

0.2 Ruine du joueur

Leçon : 249, 262. **Référence :** Ouvrard tome 2 p 380 exercice 15.2 .
Notation : $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$.

Contexte : Un joueur joue à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée ; on note p la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet. Il reçoit 1 euro de la banque s'il obtient pile et en donne un s'il obtient face.
Fortune initiale : a *euros* $\in \mathbb{N}^*$
Fortune de la banque : b *euros* $\in \mathbb{N}^*$
Le joueur joue jusqu'à sa ruine ou celle de la banque.

Modélisation : On considère $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $q = 1-p$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note S_n la fortune du joueur après n parties :

$$S_0 = a \qquad S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

En posant $Y_0 = a$, les processus Y et S ont la même filtration naturelle $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Enfin, on considère le temps d'arrêt

$$T := inf\,\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0 \text{ } ou \text{ } a+b\}$$

qui correspond au temps d'arrêt du jeu.

Problème : On s'intéresse à 3 quantitées :
- Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(T < +\infty)$ que le jeu s'arrête ?
- Quelle est la probabilité $\rho := \mathbb{P}(S_T = a+b)$ que le joueur gagne ?
- Quelle est le temps moyen $E[T]$ d'arrêt du jeu ?

Démonstration. Commençons par étudier la nature du processus $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance on a :

$$E[\Delta S_n | \mathscr{A}_{n-1}] = E[Y_n] = p \times 1 + q \times (-1) = p - q$$

Ainsi,
- Si $p = q$, S est une martingale.
- Si $p < q$, S est une sur-martingale.
- Si $p > q$, S est une sous-martingale ce que l'on suppose dans la suite.

La sous-martingale S admet la décomposition de Doob $S = M + A$ où (M_n) est une martingale issue de a et (A_n) un processus croissant prévisible issu de 0 défini par la relation $\Delta A_n = E[\Delta S_n | \mathscr{A}_{n-1}]$. Par récurrence immédiate on a :

$$A_0 = 0 \text{ } et \text{ } si\, n \geq 1, \quad A_n = n(p-q).$$

Le théorème d'arrêt appliqué à la martingale $M = (S_n - n(p-q))_{n\in\mathbb{N}}$ et au temps d'arrêt borné $T \wedge n$ donne alors

$$a = E[S_0] = E[S_{T\wedge n} - T \wedge n(p-q)]$$

D'où

$$(p-q)E[T \wedge n] = E[S_{T\wedge n}] - a \tag{1}$$

Mais par définition de T, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_{T\wedge n} \leq a+b$, donc on a

$$0 \leq (p-q)E[T \wedge n] \leq b$$

Par le théorème de convergence monotone, on a $E[T] = \lim\limits_{n\nearrow} E[T \wedge n]$. Il en résulte que T est intégrable. En particulier, T est fini presque sûrement c'est à dire $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ (considérer la suite $T_n = n\mathbb{1}_{T=\infty} \leq T$ et raisonner par l'absurde). Ainsi, comme T est fini p.s, $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers S_T. En passant à la limite dans (2.3) on obtient par argument de convergence dominée que

$$(p-q)E[T] = E[S_T] - a \tag{2}$$

Or, par définition de T, on a

$$E[S_T] = (a+b)\mathbb{P}(S_T = a+b) + 0 \times \mathbb{P}(S_T = 0)$$

donc on obtient

$$E[T] = \frac{(a+b)\rho - a}{p-q} \tag{3}$$

Cherchons a présent le paramètre $s > 0$ tel que $(U_n = s^{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale non constante : $s^{S_{n-1}}$ est $\mathscr{A}_{n-1}$-mesurable et s^{Y_n} est indépendante de $\mathscr{A}_{n-1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E[U_n|\mathscr{A}_{n-1}] = E[s^{S_{n-1}}s^{Y_n}|\mathscr{A}_{n-1}] = s^{S_{n-1}}E[s^{Y_n}|\mathscr{A}_{n-1}] = s^{S_{n-1}}E[s^{Y_n}]$$

soit

$$E[U_n|\mathscr{A}_{n-1}] = U_{n-1}(sp + \frac{1}{s}q).$$

On a $sp + \frac{1}{s}q = 1$ si et seulement si $s^2p - s + q = 0$. Les racines sont 1 et q/p. Pour $s = q/p$, U est une martingale non constante. Par définition de T et puisque $q/p < 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_{T\wedge n} \leq 1$; la martingale arrêtée $(U_{T\wedge n})$ est donc bornée donc équi-intégrable donc converge $\mathbb{P}$-p.s. et dans L^1 vers U_T.

Par définition de T, U_T prend $\mathbb{P}$-p.s. les valeurs 1 ou $(\frac{q}{p})^{a+b}$; sa moyenne vaut donc

$$E[U_T] = \mathbb{P}(S_T = 0) + (\frac{q}{p})^{a+b}\mathbb{P}(S_T = a+b)$$

soit

$$E[U_T] = 1 - \rho + (\frac{q}{p})^{a+b}\rho. \tag{4}$$

Par ailleurs, par le théorème d'arrêt , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E[U_{T\wedge n}] = E[U_0] = (\frac{q}{p})^a$$

ce qui donne, par argument de convergence dominée,

$$E[U_T] = \lim_{n\to+\infty} E[U_{T\wedge n}] = (\frac{q}{p})^a$$

en reportant cela dans les égalités (2.4) et (2.3) on obtient

$$\rho = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$$

□