262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

I - Convergence presque sûre et convergence en probabilités

① Convergence presque sûre

Déf 1 : On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire (v.a.) X s'il existe $C\in\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(C)=1$ et sur lequel $\forall \omega\in C, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$. On note $X_n \xrightarrow{ps} X$ [O2]

Prop 2 : (critère de Cauchy)
$X_n \xrightarrow{ps} X$ ssi $\forall \varepsilon>0, \mathbb{P}\left(\bigcup_n \bigcap_{m\geq n} (|X_n-X_m|<\varepsilon)\right)=1$ [B]

Rq 3 : Si (X_n) cv ps alors la limite est unique ps. [O2]

Ex 4 : Soit (X_i) iid $\sim b(p)$ $(p\in[0,1])$ [B]
Si on pose $U_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{2^i}$, alors $U_n \xrightarrow{ps} U$ où $U=\sum_{i\geq 1}\frac{X_i}{2^i}$

Prop 5 : Soit f continue sur $\mathbb{R}$ [B]
$X_n \xrightarrow{ps} X \Rightarrow f(X_n)\xrightarrow{ps} f(X)$

Prop 6 : (Borel-Cantelli) [B]
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des va
(i) si $\forall\varepsilon>0, \sum_n \mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)<+\infty$ alors $X_n\xrightarrow{ps}X$
(ii) si les (X_n) sont mutuellement indépendantes alors
$X_n\xrightarrow{ps}0 \iff \sum_n \mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)<+\infty, \forall\varepsilon>0$

Contre-ex 7 : Si on pose $X_n=\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}$ sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ [O2]
Alors $X_n\xrightarrow{ps}0$ mais $\sum_n \mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)=+\infty$ pour $\varepsilon\leq 1$

Ex 8 : Si (X_n) iid $\sim\mathcal{E}(1)$ [B]
Alors $M_n=\frac{\max_{1\leq i\leq n}(X_i)}{\ln n}\xrightarrow{ps} 1$

Prop 9 : (inégalité de Hoeffding) [DEV] [O2]
Soit (X_n) une suite de va indépendantes bornées p.s. et centrées
On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$
S'il existe $c_n>0$ tels que $|X_n|\leq c_n$ ps. alors
$\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_j c_j^2}\right)$

(CV ps non métrisable par l'abs)

Corollaire 10 : Soit $\alpha>0$. Avec les hypothèses précédentes et si on suppose qu'il existe $\beta>0$ tel que $\sum_{j=1}^{n}c_j^2\leq n^{2\alpha-\beta}$
Alors $(n^{-\alpha}S_n)$ converge ps. [O2]

Ex 11 : Soit $\varepsilon>0$. On pose $\alpha=1+\varepsilon$ et $\beta=\varepsilon$
et (X_n) une suite de va indépendantes de loi $\mathcal{U}[-n,n]$
Alors $(n^{-\alpha}S_n)$ converge ps

② Convergence en probabilité

Déf 12 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles [B]
On dit que X_n converge en probabilité vers X, et on note $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$
si $\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$

Ex 13 : Soit $(X_i)_{i\geq1}$ iid $\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et on pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
Alors $S_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. [B]

Prop 14 :
La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilités et les limites sont égales [O2]

C-ex 15 : Soit $(X_n)_{n\geq1}$ indépendantes de loi $b(\frac{1}{n})$ [O2]
$X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0$ mais (X_n) ne converge pas presque sûrement

Rq 16 : Si (X_n) cv en proba alors la limite est unique [O2]

Prop 17 : Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va réelles [B]
$X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ ssi de toute extraction $(X_{n'})$ on peut extraire une sous-suite $(X_{n''})$ telle que $X_{n''}\xrightarrow{ps}X$

Prop 18 : Si f est continue et $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$, alors $f(X_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}f(X)$ [B]

à ne pas mettre en DEV

Prop 19 : Si (X_n) vérifie le critère de Cauchy en probabilité, i.e.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}(|X_n - X_{n_0}| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$ [B]

Alors X_n converge en proba.

③ Loi des grands nombres

Dans ce paragraphe, on suppose $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi X.

On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Th 20 : (Loi des grands nombres, version faible) [B]

Si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$

Ex 21 : Presque tout nombre de $[0,1]$ admet en moyenne autant de 0 que de 1 dans son développement dyadique. [B]

Th 22 : (LGN forte) (admis)

Les assertions suivantes sont équivalentes : [B]

(i) $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

(ii) $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \mathbb{E}[X]$

Application 23 : méthode de Monte-Carlo

Soit f une fonction mesurable, soit $D \subset \mathbb{R}$ tels que $1_D \cdot f$ intégrable

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ iid $\sim \mathcal{U}([0,1])$ et soit $X_n = (1_D \cdot f) \circ U_n$

Alors $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ converge ps vers $I = \int_{[0,1]\cap D} f(x)dx$ [O2]

De plus, si f est bornée par $c > 0$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - I| > \varepsilon) \leq \frac{c^2}{n\varepsilon^2}$

Consistance des estimateurs

possible

II - Convergence en norme L^p, $p \geq 1$

Déf 24 : Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va réelles dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ [B]

X_n converge vers X dans L^p si $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_p = 0$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$

Prop 25 :

$\forall p \geq 1$, la convergence L^p implique la convergence en proba [B]

C-ex 26 : Sur $]0,1]$ muni de sa tribu borélienne, on considère $\alpha > 0$ et

$X_n : \omega \mapsto \omega^{-\alpha} 1_{]0,\frac{1}{n}]}(\omega)$ pour $n \geq 1$ [B]

$(X_n)_n$ est une suite qui converge en proba mais $X_n \notin L^p$ si $p \geq \frac{1}{\alpha}$

C-ex 27 : Sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne, on considère $p > 1$

et X_n de loi $(1 - \frac{1}{n^p})\delta_0 + \frac{1}{n^p}\delta_n$ [B]

$X_n \xrightarrow{ps} 0$ mais $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1$

Déf 28 :

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de va réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

(X_i) est dite uniformément intégrable (u.i.) si [B]

$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$

Prop 29 : (i) Toute famille finie de va intégrables est u.i. [B]

(ii) Si $\forall i \in I$, $|X_i| \leq Y$ p.s. avec Y intégrable, alors $(X_i)_{i\in I}$ est u.i.

Prop 30 : Soit $(X_i)_{i\in I}$ famille de va réelles intégrables, elle est u.i. ssi

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \varepsilon$

et (ii) $\sup_{i\in I} \int |X_i| d\mathbb{P} < \infty$ [B]

Th 31 : (Vitali)

Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va réelles. On suppose les X_n intégrables.

Les assertions suivantes sont équivalentes. [B]

(i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et (X_n) est u.i.

(ii) X est intégrable et X_n converge vers X dans L^1.

III - Convergence en loi

① Définition

Déf 32 : Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va réelles [B]

X_n converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité t de F_X, où F_X désigne la fonction de répartition de X

Ex 33 : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers x
Alors $\delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_x$ [B]

Prop 34 :
La convergence en proba implique la convergence en loi [B]

C-ex 35 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $X_n = (-1)^n X$ [B]
Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ mais il n'y a pas convergence en proba.

Prop 36 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ et c est une constante, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ [B]

Prop 37 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi pour toute fonction f continue bornée,
$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ [B]

Th 38 : (Lévy) (admis)
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t)$ [B]

Ex 39 : (théorème de Poisson) [O2]

On considère pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda>0$
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Application 40 : (évènements rares de Poisson) [DEV2]
Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1\leq j\leq M_n\}$ d'évènements indépendants. On pose $p_{n,j} = \mathbb{P}(A_{n,j})$ et $S_n = \sum\limits_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$
Si M_n tend en croissant vers $+\infty$; $\max\limits_j p_{n,j} \xrightarrow[n]{} 0$
et si $\sum\limits_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$ Alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

② Théorème central limite et statistiques

Th 41 : (TCL)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de va iid $\sim X$ avec $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
On pose $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ [O2]
Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Application à la recherche d'intervalles de confiance : [B]
Soit (X_i) iid $\sim \mathcal{B}(p)$
Pour $a<b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [a,b]\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$

On utilise ensuite le

Lemme 42 (Slutsky) :
Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} y_0 = c^{te}$
Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, y_0)$

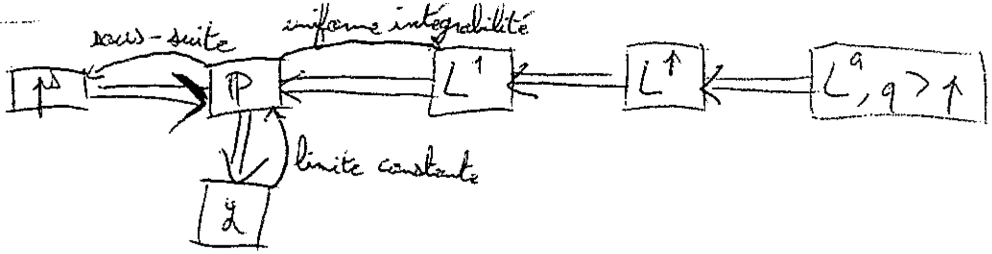
Ce qui nous permet de dire qu'avec une proba $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$, p se situe dans $\left[\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{b}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{S_n}{n}\left(1-\dfrac{S_n}{n}\right)},\ \dfrac{S_n}{n} - \dfrac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{S_n}{n}\left(1-\dfrac{S_n}{n}\right)}\right]$

Références : [B] : Barbe, Ledoux. "Probabilités"
[O2] : Ouvrard. "Probabilités 2"

Errata : - Il manque en intro : "Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé"
- L'exemple 21 va après le théorème 22

On peut parler de martingales ou chaînes de Markov

- Riesz - Fischer
- TCL
- loi des grands nombres mais avec $X \in L^4$



1) $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$. $\quad \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ CV ? $\underset{\lambda \to +\infty}{}$ $\quad$ Rq $\dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

espérance nulle et variance 1 donc si c'est 1 loi normale c'est une $\mathcal{N}(0,1)$

$(X_n) \sim \mathcal{P}(n)$ $\quad Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ iid $\quad X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $\quad \dfrac{\sum Y_i - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{\sum Y_i - n}{\sqrt{n}} \underset{TCL}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1)$

$Z = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ $\quad \mathbb{E}[e^{itZ}] = \mathbb{E}\left[e^{i\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}t}\right] = e^{-i\sqrt{\lambda}t}\left[e^{\frac{it X_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right]$

$\varphi_Z(t) = e^{-i\sqrt{\lambda}t} e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1)} = e^{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)}$

$= e^{\lambda\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{\sqrt{\lambda}} - o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^3\right) - 1 - it/\sqrt{\lambda}\right)} = e^{-t^2/2 - o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}$

2) Unicité pas de la limite.

Inégalité de Hoeffding et application [1]

Leçons : 253, 260, 261, 262, *229*

[Ouv2], exercice 10.11

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées.
De plus, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n$ est ps bornée par c_n, où $c_n > 0$.
On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et $a_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$.
Alors $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.

Démonstration :

→ Il va s'agir de démontrer le lemme qui suit.

Lemme

Soit X une variable aléatoire réelle, centrée, et ps bornée par 1.
On note L_X sa transformée de Laplace.
On a : $\forall t \in \mathbb{R}, L_X(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in [-1,1], tx = \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t$.
Donc, par convexité de l'exponentielle, on en déduit : $\forall x \in [-1,1], \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$.
Mais on sait que $|X| \leqslant 1$ ps ; en particulier, e^{tX} est bornée ps donc admet un moment d'ordre 1.
Ainsi, L_X est bien définie en t et :

$$L_X(t) \leqslant \frac{\mathbb{E}[1-X]}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathbb{E}[1+X]}{2}\mathrm{e}^{t} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}\right) = \mathrm{ch}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!2^n} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

→ Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

On applique le lemme aux variables $\frac{X_j}{c_j}$, où $j \in [\![1,n]\!]$: $\forall t \in \mathbb{R}, L_{X_j}(t) = L_{\frac{X_j}{c_j}}(tc_j) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}c_j^2\right)$.

Mais par indépendance des $\exp(tX_j)$ pour $j \in [\![1,n]\!]$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, L_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} L_{X_j}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}a_n\right).$$

→ Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$; on a : $S_n > \varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{e}^{tS_n} > \mathrm{e}^{t\varepsilon}$.

Ainsi, par l'inégalité de Markov, on obtient :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tS_n} > \mathrm{e}^{t\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tS_n}\right]}{\mathrm{e}^{t\varepsilon}} = \mathrm{e}^{-t\varepsilon}L_{S_n}(t) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}a_n\right).$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t > 0$, donc en particulier pour $t = \frac{\varepsilon}{a_n}$, où $-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}a_n$ réalise son minimum, d'où : $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{a_n^2}\frac{a_n}{2} - \frac{\varepsilon}{a_n}\varepsilon\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.

→ Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

On a : $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(S_n < -\varepsilon)$.
Mais on aurait pu appliquer tout ce qu'on vient de faire aux variables $-X_j$, où $j \in [\![1,n]\!]$, et donc :
$\mathbb{P}(S_n < -\varepsilon) = \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$.
Et finalement, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$. $\blacksquare$

Corollaire

Soit $\alpha > 0$; on ajoute l'hypothèse supplémentaire : $\exists \beta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leqslant n^{2\alpha-\beta}$.
Alors : $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} 0$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, on a, par Hoeffding : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(|S_n| > n^\alpha \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha}\varepsilon^2}{2a_n}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right)$.

Mais la série $\sum_{n\geqslant 1} \exp\left(-\frac{n^\beta\varepsilon^2}{2}\right)$ converge (par le critère de Riemann), car $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \leqslant N, \frac{\varepsilon^2}{2}n^\beta \geqslant 2\ln n$ et donc $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \leqslant N, 0 \leqslant \exp\left(-\frac{n^\beta\varepsilon^2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|S_n| > n^\alpha\varepsilon\right)$ converge, d'où, par Borel-Cantelli :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{|S_n| > n^\alpha\varepsilon\right\}\right) = 0, \text{ ie } \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\left\{|S_n| \leqslant n^\alpha\varepsilon\right\}\right) = 1.$$

En particulier, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{k\geqslant n}\left\{\left|\frac{S_k}{k^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{p}\right\}\right) = 1$.

C'est-à-dire : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists N_p$ négligeable, $\forall \omega \in N_p^c, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n, \left|\frac{S_k(\omega)}{k^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{p}$.

On pose alors $N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$, alors N est négligeable et :

$$\forall \omega \in N^c, \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n, \left|\frac{S_k(\omega)}{k^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Ou, en d'autres termes : $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} 0$. ∎

Références

[Ouv2] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 2*, 3e éd., Cassini, 2009.

1. Allez, une autre application, si vous aimez les statistiques ; elle provient de la partie 3.2 du livre *Statistique mathématique*, de B. CADRE et C. VIAL, paru en 2012 aux éditions Ellipses. Plaçons-nous dans un modèle statistique $(\mathcal{H}^n, \{P_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ avec $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ et $\Theta \subset \mathbb{R}^d$. Le paramètre d'intérêt est $g(\theta)$ avec $g : \Theta \to \mathbb{R}$ une fonction continue On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi P_θ, bornées P_θ-ps et avec $\mathbb{E}_\theta[X_1] = g(\theta)$. Soit c une borne P_θ-presque sûre de $X_1 - g(\theta)$. On veut un intervalle de confiance pour $g(\theta)$.

Par Hoeffding, $P_\theta\left(|\overline{X_n} - g(\theta)| > \varepsilon\right) = P_\theta\left(\left|\sum_{j=1}^n \left(X_j - g(\theta)\right)\right| > n\varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2nc^2}\right) = 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2c^2}\right)$. Soit $\alpha \in]0,1[$, on choisit ε de sorte que $\alpha = 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2c^2}\right)$, ie : $\varepsilon = c\sqrt{\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}}$. Dès lors, on obtient l'intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$, pour $g(\theta)$: $I_\alpha = \left[\overline{X_n} - c\sqrt{\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}}, \overline{X_n} + c\sqrt{\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}}\right]$.

Théorème des événements rares de Poisson

Leçons : ***218, 241, 249, 261, 262, 264***

[Ouv 1], théorème 7.1
[Ouv 2], théorème 14.20

Théorème (*Événements rares*)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\left\{A_{n,j} \middle| 1 \leqslant j \leqslant M_n\right\}$ d'événements indépendants.
On pose : $p_{n,j} = \mathbb{P}\left(A_{n,j}\right)$ et $S_n = \sum\limits_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.
On suppose[1] : $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$.
Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

On commence par montrer le théorème de Poisson, dont le théorème des événements rares est une généralisation.

Théorème (*Poisson*)

On considère $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Si $\lim\limits_{n \to \infty} n p_n = \lambda > 0$,
Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration du théorème de Poisson :

Comme $n p_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$, on a : $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, pour $n \geqslant k$:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}$$

Or $n(n-1)\dots(n-k+1)\left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}[\lambda + o(1)]^k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda^k$

Et $\left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} = \exp\left[(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[(n-k)\left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$

Par conséquent, $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, d'où $S_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{P}(\lambda)$. ∎

Démonstration du théorème des événements rares :

On va utiliser le théorème de Lévy.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des $A_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant M_n$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{\mathbb{1}_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \left(p_{n,j} e^{it} + 1 - p_{n,j}\right) = \prod_{j=1}^{M_n} \left(1 + p_{n,j}\left(e^{it} - 1\right)\right)$$

D'où, en posant $z = e^{it} - 1$:

$$\mathrm{Log}\left(\varphi_{S_n}(t)\right) = \sum_{j=1}^{M_n} \mathrm{Log}\left(1 + p_{n,j} z\right)$$

⚠ questions sur le log. à justifier.

Par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $|z| < 1$:

$$\mathrm{Log}(1+z) = z + \int_1^{1+z} \frac{(1+z-v)^1}{1!} \frac{-1}{v^2} \, dv = z + \int_0^1 (1 + z - 1 - zu) \frac{-1}{(1+zu)^2} z \, du = z - z^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+zu)^2} \, du$$

1. Attention, certaines hypothèses dans le livre de Ouvrard sont inutiles.

Comme $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant M_n} |p_{n,j}z| < \frac{1}{2}$.
Soit alors $n \geqslant N$,

$$\operatorname{Log} \varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{M_n} \left[p_{n,j}z - p_{n,j}^2 z^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2} \, \mathrm{d}u \right] = z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2} \, \mathrm{d}u$$

Or, pour $u \in [0,1]$, par inégalité triangulaire : $|1 + p_{n,j}zu| \geqslant 1 - p_{n,j}|z|u \geqslant 1 - p_{n,j}|z| \geqslant \frac{1}{2}$.

Donc
$$\left| \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2} \, \mathrm{d}u \right| \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{|1-u|}{|1+p_{n,j}zu|^2} \, \mathrm{d}u \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 4 \int_0^1 (1-u) \, \mathrm{d}u = 2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2$$
$$\leqslant 2 \left(\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} \right) \left(\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \right)$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+p_{n,j}zu)^2} \, \mathrm{d}u = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log} \varphi_{S_n}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda z$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{it} - 1\right)\right)$ d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. ■

Références

[Ouv 1] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 1*, 2e éd., Cassini, 2007.
[Ouv 2] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 2*, 3e éd., Cassini, 2009.

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{n_n} \varphi_{X_{n,j}}(t) \longrightarrow \varphi_\lambda(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$$
$$= \lim \underbrace{\exp\left(\sum p_{n,j}(e^{it}-1)\right)}_{\prod_{j=1}^{n_n} \exp(p_{n,j}(e^{it}-1))}$$

Or $\left| \prod_{j=1}^{n+1} a_j - \prod_{j=1}^{n+1} b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |a_j - b_j|$

D'où $\left| \prod_{j=1}^{N_n} \varphi_{X_{n,j}}(t) - \prod_{j=1}^{n_n} \exp(p_{n,j}(e^{it}-1)) \right|$
$$\leq \sum_{j=1}^{n_n} \left| (1 + p_{n,j}(e^{it}-1)) - \exp(p_{n,j}(e^{it}-1)) \right|$$
$$\leq C \sum_{j=1}^{n_n} p_{n,j}^2 |e^{it}-1|^2 \leq C \max p_{n,j} \sum_{j=1}^{n_n} p_n (e^{it}-1)^2 \to 0$$