262

Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (v.a) sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. Soit X une autre va sur Ω.

I Convergence presque sure et convergence en probabilité :

1) Convergence presque sure :

Def 1 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers X, et on note
$X_n \xrightarrow{p.s} X$ si $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega,\ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.

Prop 2 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $X_n \xrightarrow{p.s} X$

(2) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{|X_n - X| \leq \varepsilon\}\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

(3) $\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\geq m} |X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

(4) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} |X_n - X_m| < \varepsilon\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Ex 3 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et identiquement distribuées (iid) $\sim \mathcal{B}(p)$
Alors $U_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^i} \xrightarrow{p.s} U$ avec U à valeurs dans $[0,1]$.

Prop 4 : Soit f une fonction continue, alors si $X_n \xrightarrow{p.s} X$, on a :
$f(X_n) \xrightarrow{p.s} f(X)$.

Prop 5 (Borel-Cantelli appliqué) :

- Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$
- On suppose les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants, alors :
$X_n \xrightarrow{p.s} 0$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$.

Ex 6 : Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants avec $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$; alors :
$X_n \xrightarrow{p.s} 0$ ssi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < +\infty$.

Prop 7 : Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < +\infty$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$ et $\varepsilon_n \geq 0$
alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement.

Thm 8 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$) [DEV 1]
On note $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ iid telles que $\forall i \in [\![1,d]\!]$, $\mathbb{P}(\xi_1 = e_i) = \mathbb{P}(\xi_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$
On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Alors pour $d \geq 3$, $\mathbb{P}(|S_n| \longrightarrow +\infty) = 1$.

2) Convergence en probabilité :

Def 9 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, et on note
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

Rem 10 : On a unicité $\mathbb{P}$-pp de la limite obtenue.

Prop 11 :

- Soit f une fonction continue, alors si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, on a :
$f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$
- Si $\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \end{cases}$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$.

Thm 12 :

- $X_n \xrightarrow{p.s} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi de toute sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(n_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $X_{n_{k_p}} \xrightarrow{p.s} X$

C-ex 13 : Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes avec $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$, alors :
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ mais $X_n \cancel{\xrightarrow{p.s}} X$

Thm 14 :

- La convergence en probabilité est métrisable.
- (critère de Cauchy) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité ssi
$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_{n+k} - X_n| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

3) Lois des grands nombres et applications :

Thm 15 (lois des grands nombres) :

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid L^2, alors $\overline{X_n} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$
- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid L^1, alors $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$
- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid L^4, alors $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1)$
- (admis) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid, alors $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} c$ ssi $X_1 \in L^1$ et donc $c = \mathbb{E}(X_1)$.

App 16 (Monte-Carlo) : On souhaite calculer une intégrale :

$$\Theta := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)\,dx = \mathbb{E}\left(\frac{g}{f}(X)\right)$$ pour X v.a de densité f.

Si $\mathbb{E}\left(\left|\frac{g(X_1)}{f(X_1)}\right|\right) < +\infty$ avec X_i iid $\sim X$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{f(X_i)} \xrightarrow{p.s} \Theta$.

Def 17 : • On appelle modèle statistique un couple $(\mathcal{H}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{H} = \mathbb{R}^p$ est l'espace des observations et $\mathcal{P} = (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est une famille de lois indexées par l'ensemble des paramètres $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$.

• Un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$ est un vecteur $(X_1,\dots,X_n)$ avec (X_i) iid $\sim \mathbb{P}_\theta$.

• Un estimateur de $\theta \in \Theta$ est une fonction borélienne de $(X_1,\dots,X_n)$, notée $\hat\theta_n$, indépendante de θ et à valeurs dans Θ.

• On dit qu'un estimateur $\hat\theta_n$ de θ est consistant (resp fortement consistant) si $\hat\theta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ (resp. $\hat\theta_n \xrightarrow{p.s} \theta$)

Ex 18 : $\mathcal{H} = \{0,1\}$, $\mathcal{P} = (\mathcal{B}(p))_{p\in[0,1]}$, $\hat\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, (X_i) iid $\sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$

Alors $\hat\theta_n$ est un estimateur fortement consistant de θ.

II Convergence L^p :

1) Définition et premières propriétés : Soit $p \in [1,+\infty[$.

Def 19 : On pose $L^p := L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{f:\Omega\to\mathbb{K} \text{ mesurable } / \int_\Omega |f(\omega)|^p\, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty\}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'égalité presque partout. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On pose $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p\, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall f \in L^p$.

Thm 20 : • $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur L^p

• (Riesz-Fischer) $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Prop 21 : Soit $q \in [p,+\infty[$, alors :

• $L^q \subseteq L^p$ avec $\|\cdot\|_p \le \|\cdot\|_q$

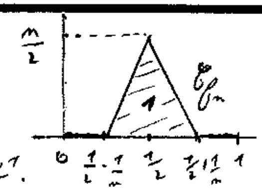
• Ainsi la convergence L^q implique la convergence L^p.

2) Lien avec la convergence presque sûre :

C-ex 22 : • On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $f_0 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_1 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, $f_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$, $f_6 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}$ etc...

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais f_n ne converge nulle part presque sûrement.

• On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :



Alors $f_n \xrightarrow{p.s} 0$

mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans L^1.

Thm 23 : • (convergence monotone) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires positives, alors : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} X_n)$

• (convergence dominée) On suppose que $X_n \xrightarrow{p.s} X$ et qu'il existe $Y \in L^1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \le Y$ p.s, alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

• (réciproque de Lebesgue) Si $X_n \xrightarrow{L^1} X$, alors il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow{p.s} X$.

Ex 24 : Soit $X \in L^1$, on pose $X_n = X\mathbb{1}_{|X|\ge n}$, alors $\begin{cases} X_n \xrightarrow{p.s} 0 \\ X_n \xrightarrow{L^1} 0 \end{cases}$

3) Uniforme intégrabilité et convergence en probabilité :

Thm 25 : Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

C-ex 26 : On pose $X_n \sim (1-\frac{1}{n})\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_n$, alors : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

mais X_n ne converge pas dans L^1.

Def 27 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable (U.I) si :

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|\ge c}) = 0$$

Ex 28 : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \le Z$ p.s avec $Z \in L^1$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est UI.

Thm 29 : Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est UI

(2) $X \in L^1$ et $X_n \xrightarrow{L^1} X$

III Convergence en loi : 1) Définition et premières propriétés :

Def 30 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si $\forall f \in C_b^0$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}(f(X))$.

Prop 31 : Soit f une fonction continue, alors si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, on a :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$$

Thm 32 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall x \in D_X$, $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$

où $D_X = \{x \in \mathbb{R} \,/\, F_X \text{ continue en } x\}$.

Ex 33 : Si $m_n \longrightarrow m$ et $\sigma_n \longrightarrow \sigma$, alors $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Thm 33 : On suppose que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des v.a discrètes ($X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$), alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ ssi } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(X = k)$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_n}(t) \longrightarrow G_X(t)$.

App 34 : Si $np_n \longrightarrow \lambda$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

2) Lien avec les autres convergences :

Prop 35 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (donc on peut remplacer $\mathbb{P}$ par ps ou L^p)

C-ex 36 : $X_n := X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, $Y := 1 - X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \text{ mais } |X_n - Y| = 1 \text{ donc } X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} Y$$

Prop 37 : Soit $c \in \mathbb{R}^d$, si $X = c$ ps et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Lem 38 (Slutsky) : Si $\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \end{cases}$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (c, Y)$

3) Convergence en loi et fonctions caractéristiques :

Def 39 : On appelle fonction caractéristique de la v.a. X l'application

$$\varphi_X : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle}) \end{array}$$

Thm 40 (Lévy) : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$

[DEV 2]

Thm 41 (Théorème central limite (TCL)) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid L^2.

On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, alors :

$$\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Cor 42 : Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Alors $$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Def 43 : Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $(\mathcal{H}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$.

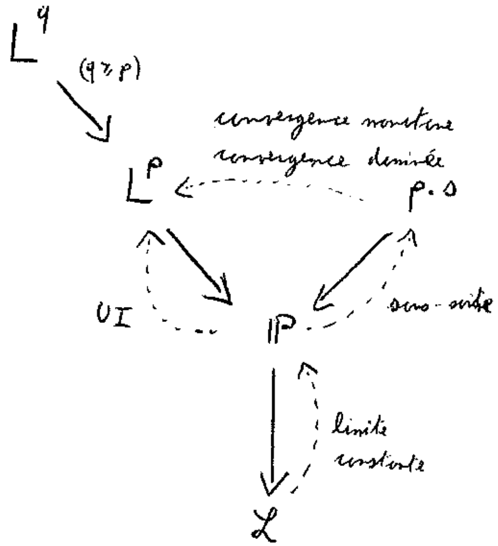
On appelle région de confiance de θ de niveau de confiance $1-\alpha$ toute famille de partie $C_{X_1,\dots,X_n}$ de Θ tq $\forall \theta \in \Theta$, $\mathbb{P}(\theta \in C_{X_1,\dots,X_n}) \geq 1 - \alpha$

Ex 44 : $\mathcal{H} = \{0,1\}$, $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta} = (\mathcal{B}(p))_{p\in[0,1]}$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$

On a : $$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Donc $$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X}_n - t_\alpha\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} ;\ \overline{X}_n + t_\alpha\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right]\right)$$

où t_α est le $1 - \frac{\alpha}{2}$ ième quantile de la loi normale centrée réduite.



Références :

- Barbé - Ledoux : I 1) / I 2) et II 3)
- Ouvrard II : I 2), I 3) et III)
- Briane - Pagès : II 1) et II 2)

2.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

Référence : Plan de leçon de Louis Garénaux et Michel Nassif.

Leçons concernées : 260, 262, 264.

Théorème 1. *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ la base canonique dans $\mathbb{R}^d$, et $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que*

$$\mathbb{P}(\xi_1 = e_i) = \mathbb{P}(\xi_1 = -ei) = \frac{1}{2d}$$

pour tout $1 \leq i \leq d$. On note $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $S_0 = 0$. Alors pour $d \geq 3$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) = 1.$$

Démonstration. On cherche à montrer que $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ converge. En effet, si on note $R = \mathbb{E}[\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{S_n=0}]$ l'espérance du nombre de retours en 0, on a par Fubini-Tonelli, $R = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0)$, et l'on pourra aboutir à une conclusion.

On cherche alors à calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. On pose, pour $t = (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi(t) := \varphi_{\xi_1}(t) = \mathbb{E}[e^{i\xi_1\cdot t}] = \sum_{j=1}^d \frac{1}{2d}(e^{it\cdot e_j} + e^{-it\cdot e_j}) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(t_j).$$

De plus, par indépendance, on a $\varphi_{S_n}(t) = (\varphi(t))^n$.

D'autre part, avec $\varphi_{S_n}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k)e^{ik\cdot t}$, si on pose $T := [-\pi, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} \varphi_{S_n}(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{T^d} \mathbb{P}(S_n = k)e^{ik\cdot t}dt = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

par Fubini puisque $\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{T^d} |\mathbb{P}(S_n = k)e^{ik\cdot t}|dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(S_n = k) = 1$ et puisque $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} e^{ik\cdot t}dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\prod_{j=1}^d e^{ik_jt_j}dt = \delta_0^k$.

Puisqu'il faut un nombre pair d'étape à $(S_n)_n$ pour revenir en 0, on sait que pour n impair, $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$. On remarque que $|\varphi| \leq 1$ sur T^d et $|\varphi(t)| = 1$ si et seulement si $t = (0, \ldots, 0), \pm(\pi, \ldots, \pi)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\geq 0}\int_{T^d}\varphi_{S_{2n}}(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\geq 0}\int_{T^d}\varphi(t)^{2n}dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\sum_{n\geq 0}\varphi(t)^{2n}dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\frac{1}{1-\varphi(t)^2}dt\end{aligned}$$

par Fubini-Tonelli puisqu'on a justifié que $\varphi(t)$ est réel et puisque $|\varphi| < 1$ presque partout sur T^d.

Puisque $\frac{1}{1-\varphi^2}$ est continue sur $T^d\backslash\{(0,\dots,0),\pm(\pi,\dots,\pi)\}$, il nous reste maintenant à justifier l'intégrabilité de la fonction $\frac{1}{1-\varphi^2}$ en $(0,\dots,0),\pm(\pi,\dots,\pi)$. On se limite au point $(0,\dots,0)$ puisque pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\cos(y\pm\pi)=-\cos(y)$.

Or, en 0,

$$\varphi(t)=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(1-\frac{t_j^2}{2}+o(t_j^2)\right)=1-\frac{||t||^2}{2d}+o(||t||^2)$$

et ainsi

$$1-\varphi(t)^2=\frac{||t||^2}{d}+o(||t||^2)$$

donc

$$\frac{1}{1-\varphi(t)^2}\sim\frac{d}{||t||^2}$$

qui est intégrable en 0 dès que $d\geq 3$.

Soit maintenant $k\in\mathbb{Z}^d$, on montre que $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=k)$ converge en se ramenant en 0 : soit $l\in\mathbb{N}^*$, on a, pour $n\geq l+1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n=0)&\geq\mathbb{P}(S_n=0\text{ et }S_l=-k)\\&\geq\mathbb{P}(\xi_1+\dots+\xi_l=-k\text{ et }\xi_{l+1}+\dots+\xi_n=k)\\&=\mathbb{P}(S_l=-k)\mathbb{P}(S_{n-l}=k)\end{aligned}$$

car les ξ_i sont i.i.d. Or si $l=|k|$, $\mathbb{P}(X_l=-k)\geq\frac{1}{(2d)^l>0}$ donc

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{n\geq l}\mathbb{P}(S_{n-l}=k)\leq\frac{1}{\mathbb{P}(X_l=-k)}\sum_{n\geq l}\mathbb{P}(S_n=0)<\infty.$$

On peut alors conclure : pour $k\in\mathbb{Z}^d$, on note $N_k:=\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{S_n=k}$ le nombre de retours de S_n en k, et puisque $\mathbb{E}[N_k]=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=k)$, N_k est fini presque sûrement. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n|\to+\infty)&=\mathbb{P}(\forall A\in\mathbb{N}^*,\ \exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |S_n|\geq A)\\&=\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}(\exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |S_n|\geq A)\\&=\lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}(\forall k,\ |k|\leq A,\ N_k\text{ est fini})\\&=1\end{aligned}$$

puisque $(\{\exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |S_n|\geq A\})_{A\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, que $\{\exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |S_n|\geq A\}=\{\forall k,\ |k|\leq A,\ N_k\text{ est fini}\}$ et puisque l'union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. □

Remarque : pour obtenir $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\varphi_{S_n}(t)dt=\mathbb{P}(S_n=0)$ on pourrait utiliser les coefficients de Fourier de φ_{S_n} mais cela suppose d'introduire les séries de Fourier en dimension d, (cf H. Dym, H.P. McKean, D. Aldous, Y.L. Tong, *Fourier Series and integrals*, Academic Press, 1985).

4.2 Théorème de Lévy

Référence : H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'Analyse*, Dunod, 2002.

Leçons concernées : 250, 260, 261, 262.

Définition 1. On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée f, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

Pour une variable aléatoire X on note $\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 2 (Lévy). *Soit $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires. Alors on a équivalence entre*

(i) La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X

(ii) La suite de fonctions $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X.

On commence par montrer la proposition suivante :

Proposition 3. *Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge en loi vers X si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.*

Démonstration. Le sens direct est évident puisqu'une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est bornée.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et soit $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(x, |x| \geq A) \leq \varepsilon$. On pose $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la fonction valant 1 sur $[-A, A]$, 0 en dehors de $[-2A, 2A]$, et affine entre $-2A$ et A et entre A et $2A$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) d\mathbb{P}_X \leq \mathbb{P}_X(x, |x| \geq A) \leq \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_X &= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_{X_n} \\ &\quad + \left[\int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_X\right] + \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_X =: A_n + B_n + C_n.\end{aligned}$$

On a alors $|A_n| \leq ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) d\mathbb{P}_{X_n} = ||f||_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_{X_n}\right)$ d'où $\limsup_n |A_n| \leq ||f||_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_X\right) = ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) d\mathbb{P}_X \leq \varepsilon ||f||_\infty$ par hypothèses. D'autre part, $|B_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $f\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $|C_n| \leq \varepsilon ||f||_\infty$. On a alors

$$\limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_X \right| \leq 2\varepsilon ||f||_\infty$$

et donc $|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Démonstration (Théorème). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est directe en remarquant que $f(x) := e^{itx}$ est continue bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on se donne f de la forme $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)dt$ avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Par les théorèmes de Fubini et de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n}\varphi(t)dt\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left[e^{itX_n}\right] dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] dt = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX}\varphi(t)dt\right] = \mathbb{E}[f(X)].\end{aligned}$$

Maintenant, si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $||f-g||_\infty \leq \varepsilon$. Or $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et donc par bijectivité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, g s'écrit $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)dt$ avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, et on conclut par inégalité triangulaire en remarquant que pour toute variable aléatoire Y, $\mathbb{E}[(f-g)(Y)] \leq ||f-g||_\infty$. □

On peut déduire de ce théorème le théorème central limite, au moyen du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors*

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z.$$

Théorème 5 (Central limite). *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 =$* $\mathrm{Var}(X_1)$. *Alors si $S_n = \sum_{k=1}^n X_n$,*

$$\frac{S_n - mn}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Démonstration. On peut sans perte de généralité se ramener au cas $m = 0$ et $\sigma = 1$. On utilise le théorème précédent et on cherche donc à montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \to e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note $\varphi := \varphi_{X_1}$. Puisque X_1 admet un moment d'ordre 2, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie : $\varphi'(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi''(0) = [-X^2] = -1$. On a d'autre part

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] \\ = \mathbb{E}\left[e^{itX_1/\sqrt{n}}\right]^n &= \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^n.\end{aligned}$$

On conclut donc avec le lemme. □