262. Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Cadre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X désignent une suite de va et une va de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}^d, |.|)$.

I. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires.

① Convergence presque sûre (p.s.) [1][2]

Def 1: On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si:
$\mathbb{P}(\omega\in\Omega, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega))=1$. On note alors $X_n \xrightarrow{ps} X$.

[1] Prop 2: $X_n \xrightarrow{ps} X$ ssi $\forall \varepsilon>0$, $\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n-X|\geq\varepsilon\})=0$

ssi $\forall\varepsilon>0$ $\lim_{p\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{m\geq p} |X_n-X|\geq\varepsilon)=0$

ssi $\forall\varepsilon>0$ $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}\{|X_n-X_m|<\varepsilon\})=1$ (critère de Cauchy)

Ex 3: Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\left(\sum_{i=1}^n 2^{-i}X_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

Prop 4: Si ϕ est continue et que $X_n\xrightarrow{ps}X$, alors $\phi(X_n)\xrightarrow{ps}\phi(X)$.

[2] Rque 5: Si $X_n\xrightarrow{ps}X$, la limite X est unique p.s.

Thm 6 (Lemme de Borel Cantelli). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n)<\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)=0$
- Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et que $\sum_n \mathbb{P}(A_n)=+\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)=1$.

[1] Cor 7: · Si $\forall\varepsilon>0$ $\sum_n \mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)<\infty$, alors $X_n\to X$ ps.
· Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_n\to 0$ ps si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)<\infty$, $\forall\varepsilon>0$.

Ex 8: Soit $(X_i)_{i\geq1}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors $\frac{\max_{1\leq i\leq n} X_i}{\ln n}\xrightarrow{ps}1$.

C-ex 9: Soit $X_n=\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$ sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mathbb{P})$. Alors $\forall\varepsilon>0$ $\sum_{n\geq1}\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)=+\infty$ mais $X_n\xrightarrow{ps}0$.

[1] Thm 10 (Kolmogorov) Soit (X_n) indépendantes. Alors $\sum X_n$ converge ps ssi $\exists c>0$ tel que $\sum_n\mathbb{P}(|X_n|>c)$, $\sum_n\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{|X_n|\leq c})$ et $\sum_n \mathrm{Var}(X_n\mathbb{1}_{|X_n|\leq c})$ convergent.

Thm 11 (Hoeffding) Soit $(X_n)_{n\geq1}$ réelles, indépendantes, centrées et telles que $\forall n\geq1$, $|X_n|\leq c_n$ ps où $c_n>0$. Soit $\forall n\geq1$, $S_n=\sum_{j=1}^n X_j$ et $a_n=\sum_{j=1}^n c_j^2$. Alors:

$$\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right).$$

Cor 12 Soit $\alpha>0$. On suppose qu'il existe $\beta>0$ tel que $a_n\leq n^{2\alpha-\beta}$. Alors $\frac{S_n}{n^\alpha}\xrightarrow{ps}0$

Ex 13 Si $|X_n|\leq1$, alors $\forall\alpha>1/2$, $S_n/n^\alpha\xrightarrow{ps}0$.

DEV [2]

② Convergence en probabilité [1][2]

Def 14. On dit que $(X_n)_{n\geq0}$ converge en probabilité vers X, et on note $X_n\xrightarrow{P}X$ lorsque $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$. [1]

Prop 15 La convergence ps implique la convergence en probabilité.

C-ex 16. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ indépendantes, telles que $\mathbb{P}(X_n=1)=1-\mathbb{P}(X_n=0)=\frac{1}{n}$, $\forall n\geq1$. [2]
Alors $X_n\xrightarrow{P}0$ mais $X_n \not\xrightarrow{ps} 0$.

Prop 17: · Si $X_n\xrightarrow{P}X$, X est unique ps
· $X_n\xrightarrow{P}X$ ssi $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\geq0$, $\forall n\geq n_0$ $\mathbb{P}(|X_n-X_{n_0}|\geq\varepsilon)\leq\varepsilon$ (Cauchy)
· Si ϕ est continue et que $X_n\xrightarrow{P}X$ alors $\phi(X_n)\xrightarrow{P}\phi(X)$.

Prop 18 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Si $X\in L^2$, alors $\forall t>0$:
$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq t)\leq\frac{\mathrm{Var}\,X}{t^2}$$

Thm 19 (Weierstrass) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1])$. et $B_n(f): x\in[0,1]\mapsto\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$ [1]
Alors $\|B_n(f)-f\|_{\infty,[0,1]}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

Ex 20: Si les $(X_i)_{i\geq1}$ sont indépendantes, centrées, de variance $\sigma^2>0$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\xrightarrow{P}0$.

Prop 21: $X_n\xrightarrow{P}X$ ssi de toute suite croissance (n') d'entiers, on peut extraire une sous-suite (n'_k) telle que $X_{n'_k}\xrightarrow{ps}X$. [2]

Thm 22 (Paul Lévy) Si les (X_n) sont réelles et indépendantes. Alors $\sum X_n$ converge en probabilité ssi elle converge ps. [1]

Rque 23: $d(X,Y)=\mathbb{E}(\min(1,|X-Y|))$ est une distance compatible avec la convergence en probabilité. La prop. 21 implique que la convergence presque sûre n'est elle, pas métrisable.

③ Convergence en norme L^p, $p \geq 1$. [1][4][2]

Def 24: Soit $p \geq 1$. $X \in L^p$ si $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$. L^p muni de $\|X\|_p = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}$ est alors un espace complet.

[1] **Def 25**. On dit que (X_n) converge vers X dans L^p, et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si $\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Prop 26: Soit $q \geq p \geq 1$. Alors $X_n \xrightarrow{L^q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

C-ex 27: Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$, X_n de loi $(1-n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$ où $p \geq 1$. Alors $X_n \xrightarrow{ps} 0$ et $\forall n$ $\mathbb{E}(|X_n|^p) = 1$.

[4] **C-ex 28**. $\Omega = [0,1]$. $\forall n \geq 0$, $\forall k \in [0, 2^n - 1]$, $X_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[k/2^n, (k+1)/2^n[}$. $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{ps} 0$.

Prop 29: Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors il existe une suite extraite $(X_{n_k})_{k\geq 0}$ et $Y \in L^p$ tel que $|X_{\varphi(n)}| \leq Y$ p.s et $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{ps} X$.

Def 30 On dit qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires de L^1 est uniformément intégrable si $\lim\limits_{c\to\infty} \sup\limits_{i\in I} \int_{|X_i|>c} |X_i| \, dP = 0$.

[1] **Ex 31**. Si $\forall i \in I$ $|X_i| \leq Y$ où $Y \in L^1$, alors $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

Prop 32 Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de L^1. Alors $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable ssi

i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A) \leq \eta \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| \, dP \leq \varepsilon$, et,

ii) $\sup\limits_{i\in I} \int |X_i| \, dP < \infty$.

Thm 33 (Vitali) Soit $p \geq 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans L^p. Alors, sont équivalentes :

i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p

ii) (X_n) est de Cauchy dans L^p

iii) $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et il existe $X \in L^p$ tel que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

[2] **C-ex 34**: Si, $\forall n \geq 1$, X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais (X_n) ne converge pas dans L^p.

Prop 35: Soit $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, $\forall n \geq 1$ où $(m_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ sont bornées. Alors s'il existe X tel que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $\exists m \in \mathbb{R}$ $\exists \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et de plus, $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $\forall p \geq 1$.

④ Convergence en loi [1][2]

Def 36: On dit que (X_n) converge vers X en loi, et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si, en notant F_X la fonction de répartition de X, $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité t de F_X. [1]

Prop 37 La convergence en loi est impliquée par les 3 convergences précédentes.

C-ex 38: Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ mais $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Prop 39: Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}^d$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. [2]

Prop 40. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ où $m_n \to m$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Thm 41 (Slutsky) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}^d$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$. [1]

Thm 42 (Lévy) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ (où φ_X est la fonction caractéristique de X).

Ex 43: Si les (X_i) sont iid $\sim \mathcal{B}(p)$, $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}[0,1]$.

Thm 44 (Représentation) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ dans $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ssi il existe $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ un espace probabilisé sur lequel sont définies (X_n') et X' tel que X_n et X_n' ont la même loi pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X_n' \xrightarrow{ps} X'$.

Schéma bilan 45:

$$\begin{tikzcd}
\text{CV ps} \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & \\
\text{CV } \mathbb{P} \arrow[u, shift right, "\text{sous suite}"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[r, "\text{Vitali}"', shift right] & \text{CV } L^1 \arrow[l, Rightarrow, shift right] & \text{CV } L^p \arrow[l, Rightarrow] \arrow[llu, dashed, bend right, "\text{sous-suite}"'] \\
\text{CV loi} \arrow[u, shift right, "X_\infty = C"'] \arrow[uu, dashed, bend left, "\text{représentation}"] & &
\end{tikzcd}$$

II. Théorèmes limites

(ici les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont iid et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall n \geq 1$).

① Loi des grands nombres [2][3]

Thm 46 (Loi faible des grands nombres) Si $X_1 \in L^1$, alors $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

Thm 47 (Loi forte des grands nombres) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de $L^2(\Omega)$. On suppose que $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} m$ et que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \mathrm{Var}(Y_j) < \infty$. [2]
Alors $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ps et dans L^2 vers m.

C-ex 48 Si Y_i est de loi $\frac{1}{i \ln i}(\delta_i + \delta_{-i}) + (1 - \frac{1}{2i\ln i})\delta_0$ $\forall i \geq 1$ et les (Y_i) indépendants. Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $\frac{S_n}{n} \not\xrightarrow{ps} 0$

Thm 49 (Kolmogorov–Khintchine) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
i) $\mathbb{E}(|X_1|)<\infty$ et ii) $\exists c\in\mathbb{R}$, $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{ps} c$.
Dans le cas où i) est vérifiée, alors $c=\mathbb{E}(X_1)$.

(2) **Prop 50 (Monte-Carlo)** : Soit $f:[0,1]^d\to\mathbb{R}\in L^1([0,1]^d)$. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ iid de loi $\mu([0,1]^d)$. Alors :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\xrightarrow{ps}\int_{[0,1]^d} f(x)\,dx.$$

Thm 51 (Glivenko-Cantelli) Soit X une var de loi μ et (X_n) une suite de var iid de loi μ et de fonction de répartition F.
Le vecteur aléatoire $(X_1,\dots,X_n)$ est appelé échantillon de taille n de X et on définit la fonction de répartition empirique F_n par : $\forall (x,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$, $F_n(x,\omega)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_j\leq x\}}(\omega)$.
Alors, ps, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x,\cdot)-F(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

(3) **Ex 52** : Dans le jeu de pile ou face, le modèle statistique est $(\{0,1\}^n,\{\mathcal{B}(p)^{\otimes n}\}_{p\in]0,1[})$ et l'estimateur $\overline{X_n}:=\frac{1}{n}S_n$ construit avec un échantillon $(X_1,\dots,X_n)\sim\mathcal{B}(p)^{\otimes n}$ vérifie : $\overline{X_n}\xrightarrow{ps}p$. On dit que $\overline{X_n}$ est fortement consistant.

② Comportement asymptotique des chaînes de Markov [1].

(ici, $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P)

Def 53 : On appelle probabilité invariante de la chaîne une probabilité μ telle que $\mu P=\mu$.

Thm 54 Toute chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini admet au moins une mesure invariante.

(1) **Thm 55** On suppose que (M_n) est irréductible et récurrente. On note E son espace d'arrivée. Alors (M_n) admet une probabilité invariante ssi $\exists i\in E$ tel que $\mathbb{E}_{\mu_i}(\tau_i)<\infty$ où $\tau_i=\inf\{n>0,\ M_n=i\}$ et où $M_0\sim\mu_i=\delta_i$.
Dans ce cas, la chaîne admet une unique probabilité invariante et elle est donnée par
$$\mu_j=\frac{1}{\mathbb{E}_{\mu_j}(\tau_j)},\ \forall j\in E.$$

Thm 56 (Théorème ergodique). On suppose que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, récurrente positive. Alors elle admet une unique mesure invariante μ et, $\forall f\in L^1(\mu)$ et toute loi initiale μ_0,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k)=\int_E f\,d\mu \text{ p.s.}$$

Ex 57 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$). Soit $d\geq 3$. On définit la marche aléatoire issue de 0 par : $M_0=0$ et $\forall n\geq 0$, $M_{n+1}=M_n+S_{n+1}$ où les $(S_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, de loi uniforme sur $\{\pm e_i\}_{1\leq i\leq d}$ où $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Alors, $\mathbb{P}\left(\|X_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty\right)=1$.

③ Théorème central limite [1][3].

[1] **Thm 58 (Théorème central limite)**. Soit (X_n) iid et dans L^2. On note $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\forall n\geq 1$. Alors, $\frac{S_n-n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{Var}(X_1))$.

Thm 59 (Théorème central limite poissonien). Soit $Z_n\sim\mathcal{B}(n,p_n)$, $\forall n\geq 1$ avec $\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$. Alors $Z_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Z$ où $Z\sim\mathcal{P}(\lambda)$.

Thm 60 (δ-méthode). Soit $(v_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n\to+\infty$, $a\in\mathbb{R}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var telle que $v_n(X_n-a)\xrightarrow{\mathcal{L}}\ell$ où ℓ est une loi. Alors si $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a, $v_n(\varphi(X_n)-\varphi(a))\xrightarrow{\mathcal{L}}\varphi'(a)\ell$.

(3) **Ex 61** : On se place dans le modèle statistique $(\mathbb{R}_+^{*n},\{\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n}\}_{\lambda>0})$. On estime λ par $\frac{1}{\overline{X_n}}$ où $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ avec $(X_1,\dots,X_n)\sim\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n}$. Alors :
$$\sqrt{n}\,(1-\overline{X_n}\lambda)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$$
et donc si q est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de $\mathcal{N}(0,1)$, $\left[\frac{1-q/\sqrt{n}}{\overline{X_n}},\frac{1+q/\sqrt{n}}{\overline{X_n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau $(1-\alpha)$.

Def 62 Soit $(H^n,\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique dominé par une mesure σ-finie μ, avec $H\subset\mathbb{R}^k$ et $\Theta\subset\mathbb{R}^d$. On appelle vraisemblance du modèle $(H^n,\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ l'application $L_n:H^n\times\Theta\to\mathbb{R}_+$ tel que pour $\theta\in\Theta$, $L_n(\cdot,\theta)=\frac{dP_\theta}{d\mu}$.
On appelle estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ un estimateur $\hat{\theta}$ tel que $L_n(\cdot,\hat{\theta})=\sup_{\theta\in\Theta}L_n(\cdot,\theta)$.

DEV **App 63 (Étude de l'emv de $\mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta>0$)** Soit $(X_1,\dots,X_n)\sim\mathcal{U}[0,\theta]^{\otimes n}$. Soit $\hat{\theta}_n$ l'EMV de θ.
Alors :
1) $\hat{\theta}_n=\max_{1\leq i\leq n}X_i$
2) $\hat{\theta}_n$ est biaisé
3) $\hat{\theta}_n$ est fortement consistant i.e. $\hat{\theta}_n\xrightarrow{ps}\theta$.
4) $n(\hat{\theta}_n-\theta)\xrightarrow{\mathcal{L}}-\mathcal{E}(1/\theta)$
5) Le risque quadratique de $\hat{\theta}_n$ vaut $\mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}-\theta)^2)=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$