262

Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Notation : Dans toute la leçon, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera une suite de variables aléatoires réelles, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X sera une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

I Convergence presque sûre et convergence en probabilité

1) Convergence presque sûre

Définition 1 (Convergence presque sûre) : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

On note alors $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ p.s. ou $X_n \xrightarrow{p.s} X$

Exemple 2 : Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i/2^i$. Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s.

Lemme 3 (Borel-Cantelli) : 1) Si pour tout $\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{|X_n - X|>\varepsilon\}) < +\infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$

2) Si les X_i sont mutuellement indép., alors $X_n \xrightarrow{p.s} 0$ ~~ssi~~ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{|X_n - X|>\varepsilon\}) < +\infty$.

Application 4 : Deux joueurs disputent une infinité de parties de pile ou face avec une pièce truquée ; $\mathbb{P}(\{Pile\}) = \frac{1}{2}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Si le premier parie toujours sur pile et le second toujours sur face, leurs scores seront égaux un nombre fini de fois p.s.

Proposition 5. On a équivalence entre les énoncés suivants :

i) $X_n \xrightarrow{p.s} X$

ii) $\mathbb{P}(\{\exists n\geq N, |X_n - X| > \varepsilon\}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ pour tout $\varepsilon>0$

iii) $\mathbb{P}(\{\sup_{n\geq N} |X_n - X| > \varepsilon\}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ pour tout $\varepsilon>0$

Corollaire 6. i) Si la série $\sum \mathbb{P}(\{|X_n - X|>\varepsilon\})$ converge pour tout $\varepsilon>0$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

ii) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n - X|)$ converge, $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

2) Convergence en probabilité.

Définition 7 (Convergence en probabilité) : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X|>\varepsilon\}) = 0$. On note alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Exemple 8 : Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ et $Var(Y_n) = \sigma^2$, $\sigma\in\mathbb{R}^{+*}$. Alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} Y_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes partielles converge en probabilité vers 0.

Proposition 9. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui convergent en probabilité vers X et Y respectivement. Alors :

i) Si $\phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, $\phi(X_n) \xrightarrow{P} \phi(X)$

ii) Si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$.

iii) $\langle X_n, Y_n\rangle \xrightarrow{P} \langle X, Y\rangle$

Théorème 10. $X_n \xrightarrow{P} X$ si et seulement si de toute suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(\psi(\varphi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X_{\psi(\varphi(n))} \xrightarrow{p.s.} X$

Contre-Exemple 11 : On considère la suite d'intervalles : $[0,1]$; $[0,\frac{1}{2}]$; $[\frac{1}{2},1]$; $[0,\frac{1}{3}]$; $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$; $[\frac{2}{3},1]$; $[0,\frac{1}{4}]$ ...)

On définit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite des indicatrices de ces intervalles. Alors $(Y_n) \xrightarrow{P} 0$ mais pas p.s.

Définition 12. Notons $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (à égalité p.s. près). Pour tous $X, Y \in L^0$, on note : $d(X,Y) := \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$

Théorème 13. d est une distance sur L^0, et elle caractérise la convergence en probabilité :

$X_n \xrightarrow{P} X$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$

3) Loi des grands nombres

Notation : Dans cette sous partie, nous supposerons les X_i indépendants et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i$.

Théorème 14 (loi faible des grands nombres). Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X)$

Théorème 15 (loi forte des grands nombres) $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ si et seulement si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X)$

Application 16 (Méthode de Monté-Carlo) Soit $f\ [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Lebesgue. Soit $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(U_j) = \mathbb{E}(f(U_1)) = \int_0^1 f(x)dx.$$

II Convergence L^P

1) Définitions et propriétés

Définition 17. Soit $p > 0$. On appelle $L^P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(|X|^P) < +\infty$

Proposition 18. Pour tout $p > 0$, l'espace $L^P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est complet pour la norme $\|X\|_p := \mathbb{E}(|X|^P)^{1/P}$

Définition 19 (convergence dans L^P) Si les X_n et X sont dans $L^P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $0 < p < +\infty$ On dit que (X_n) converge vers X dans L^P si $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$ ou, de manière équivalente, que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^P) = 0$. On notera $X_n \xrightarrow{L^P} X$

Définition 20 (famille équi-intégrable). Une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ de variable aléatoires intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite équi-intégrable si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>c} |X_i| \, d\mathbb{P} = 0$$

2) Lien avec les autres types de convergence

DEVELOPPEMENT

Théorème 21 (Vitali) : Une famille de variables aléatoires réelles intégrables $(X_i)_{i\in I}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est équi-intégrable si et seulement si :

i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \forall i \in I \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \varepsilon$

ii) $\sup_{i\in I} \int |X_i| \, d\mathbb{P} < +\infty$

Théorème 22:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

i) $X_n \xrightarrow{P} X$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

ii) X est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$

Corollaire 23: Si il existe $p>1$, $p\in\mathbb{N}$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ et si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $q<p$, $\lim_{n\to\infty}\|X_n - X\|_q = 0$

Corollaire 24: Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n\xrightarrow{P} X$

Contre-exemple 25: Soit $\Omega=[0,1]$ munit de sa tribu borélienne. Soit $\mathbb{P}$ uniforme sur Ω, soient $\alpha \geq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $X_n(\omega) = \omega^{-\alpha}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(\omega)$. Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$, mais $X_n\notin L^p$ si $\alpha p >1$.

III Convergence en Loi

Notation: Si X variable aléatoire réelle, F^X est sa fonction de répartition et Φ_X sa fonction caractéristique

1) Définitions

Définition-Théorème 26. On dit que (X_n) converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

i) $\lim_{n\to\infty} F^{X_n}(t) = F^X(t)$ pour tout point de continuité de F^X

ii) $\lim_{n\to\infty} \int \varphi(X_n)\, d\mathbb{P} = \int \varphi(X)\, d\mathbb{P}$ pour toute fonction continue et bornée φ.

iii) $\lim_{n\to\infty} \Phi^{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t)$ pour tout t (Théorème de Levi)

iv) Il existe $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ tel que on ait X'_n et X' des variables sur Ω' vérifiant : X_n et X_n' de même loi et X et X' de même loi et $X_n' \xrightarrow{p.s.} X'$

Exemple 27: Si $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{N}(0,\frac{1}{n})$, alors F^{X_n} converge simplement vers
$H : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui est discontinue en 0.

2) Lien avec les autres types de convergence

Théorème 28: Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Si $X_n\xrightarrow{P}X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Contre-exemple 29 : Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n = (-1)^n X$.
Alors X_n converge en loi vers X mais pas p.s. ni en probabilité

Proposition 30: Soit $c\in\mathbb{R}$. Si $X = c$ p.s. et $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $X_n \xrightarrow{P} X$

3) Théorème central limite

Notation: Dans cette sous partie, nous supposerons les X_n indépendants et de même loi. Pour $n\in\mathbb{N}$, on notera $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

DEVELOPPEMENT (Théorème central limite) 31:

1) Si $E(X^2)<+\infty$, alors $\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$

2) Si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, alors $\mathbb{E}(X)=0$ et $E(X^2)<\infty$ et la limite est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$

Exemple 32: Si pour $i\in\mathbb{N}$, X_i est de loi $\mathcal{B}(1,p)$, alors pour tout $a<b$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{a\leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\}\right) = \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$

Théorème 33: Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p_n)$.
Si $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda>0$, alors S_n converge vers une variable de Poisson de paramètre λ en loi.