263

Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

I Variables aléatoires à densité. Premières propriétés

Cadre : $n \geq 1$ entier, X v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

1) Densité, fonction de répartition [OU 1].

[OU 1] p.184

Def 1 S'il existe une fonction f_X définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs positives, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = 1$ et $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$. Alors f_X est appelée densité de la v.a. X (f_X détermine la loi de X)

Def 2 ($n=1$) Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t])$. F_X est dite fonction de répartition de X

prop 3 Si X est de densité f_X, alors F_X est continue en tout point et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ et F_X est dérivable en tout point de continuité de f_X. (avec $F_X'(x) = f_X(x)$)

[BL]

Exemples 4 • X suit une loi uniforme sur $[a,b]$, notée $X \sim \mathcal{U}[a,b]$ si $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ (alors $E[X] = \frac{a+b}{2}$ et $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$)

• X suit une loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

On a alors $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

• X suit une loi Gamma de paramètre p et θ, notée $\gamma(p,\theta)$ si sa densité est $f_X(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

On la note $\gamma(p,\theta)$.

prop 5 Si $\forall i = 1 \dots n$, $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(n, \lambda)$

2) Opérations sur les densités.

[OU 1] p.184

prop 6 ($n=2$) Soit (X_1, X_2) de densité $f_{X_1,X_2} \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Alors X_1 et X_2 sont des v.a à densité et les densités sont données par : $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2$

$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1$.

[BL]

prop 7 Soit X v.a de densité f_X.

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme

alors la v.a $Y = g(X)$ admet une densité f_Y donnée par

$f_Y(y) = |\mathrm{Jac}\, g^{-1}(y)| \cdot f_X(g^{-1}(y))$

Exemple 8 : Soit R de densité $r \mapsto e^{-r^2} r \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(r)$.

$\theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$. t.q $R \perp\!\!\!\perp \theta$.

alors $(R\cos\theta, R\sin\theta) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$

prop 9 X de densité f_X.

alors $X \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow f_X \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{P}_X)$. Et si $X \in L^1(\Omega)$,

$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x)dx$, $\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3) Fonction caractéristique et densité. [BL].

[P]

Def 10 On appelle fonction caractéristique de X la fonction.

$\varphi^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \varphi^X(t) = E[e^{i\langle t, X\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} f_X(x)dx$ si X de densité f_X

Rmq Lorsque X est à densité, φ_X n'est autre que la transformée de Fourier de f_X.

Thm 11 X, Y 2 v.a. Si $\varphi^X = \varphi^Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Ex 12 | $\cdot X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$.

$\cdot X \sim \mathcal{U}[a,b]$, $\varphi_X(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

Thm 13 (Formule d'inversion de Fourier).

X v.a. Si φ^X est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors la loi de X admet une densité continue bornée f^X, donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par $f^X(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t,x\rangle} \varphi^X(t)\,dt$

Exemple 14 | Soit X de loi de Laplace (i.e $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$).
alors $\varphi^X(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

On en déduit que si X suit une loi de Cauchy (i.e $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, alors $\varphi^X(t) = e^{-|t|}$

[BL]

II Utilisation des lois à densité en statistiques.

Dans la partie I, nous avons uniquement considéré des v.a à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
Toutefois, la notion est plus générale : Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$, X est à densité par rapport à μ s'il existe $f \geq 0$, μ-mesurable **et dans** $L^1(\mu)$ t.q $\mathbb{P}_X = f\mu$.

On a le résultat suivant :

Thm 15 | (Lebesgue-Radon-Nicodym). [DVLP] Soit μ une mesure positive, finie sur $[0,1]$. Il existe $f \in L^1([0,1])$ et ν une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue λ telles que $\mu = f\lambda + \nu$.

1) Maximum de vraisemblance. [C-V].

Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{P})$ un modèle statistique quelconque, avec $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^k$.

Def 16 | Le modèle statistique $(\mathcal{H}^n, \mathcal{P})$ est dit dominé s'il existe une mesure σ-finie μ sur $\mathcal{H}^n$ telle que P est à densité par rapport à μ pour tout $P \in \mathcal{P}$. [C-V] p.116.

Exemples 17 | $\cdot$ le modèle gaussien $(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}(m,\sigma^2)^{\otimes n}\}_{m\in\mathbb{R},\sigma>0})$ est dominé par la mesure de Lebesgue

$\cdot$ le modèle de Bernoulli (du jeu de pile ou face) : $(\{0,1\}^n, \{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}\}_{\theta\in]0,1[})$ est dominé par $(\delta_0 + \delta_1)^{\otimes n}$.

Def 18 | Soit $(\mathcal{H}^n, \{P_\theta\}_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique dominé par une mesure σ-finie μ, avec $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^k$ et $\Theta \subset \mathbb{R}^d$.
La vraisemblance du modèle est l'application :
$L_n : \mathcal{H}^n \times \Theta \to \mathbb{R}_+$ t.q $\forall \theta \in \Theta$, $L_n(\cdot;\theta) : \mathcal{H}^n \to \mathbb{R}_+$ est un élément de la classe d'équivalence de la densité de $\mathbb{P}_\theta$ par rapport à μ. [C-V] p.43.

Exemple 19 | Modèle gaussien : $L_n(x_1,\dots,x_n,m,\sigma^2) = \dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

$\cdot$ Modèle Bernoulli : $L_n(x_1,\dots,x_n,\theta) = \theta^{n\overline{x}_n}(1-\theta)^{n(1-\overline{x}_n)}$
(avec $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$)

prop 19 | $\forall \theta \in \Theta$, $L_n(\cdot;\theta) > 0$ $\mathbb{P}_\theta$ p.s.

Def 20 | Un estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est un estimateur qui vérifie : $L_n(\cdot,\hat\theta) = \sup_{\theta\in\Theta} L_n(\cdot,\theta)$.

[C-V] p. 179

[C-V] p. 40.

Ex. 21 | Modèle Bernoulli : l'EMV est $\hat{\theta} = \overline{x_n}$

Modèle gaussien : $\hat{m} = \overline{x_n}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})^2$

2) Théorème Central Limite.

Thm 22 | (Thm Central Limite) Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a iid t.q $X_1 \in L^2(\Omega)$.
et $E[X_1] = m$.

Alors $\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - m) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Application 23 | On peut calculer des intervalles de confiance pour nos estimateurs. Par exemple :
- $\left[\overline{X_n} - \frac{q}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}, \overline{X_n} + \frac{q}{\sqrt{n}} \sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour θ. (où q est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$)

Thm 24 | (Thm Central Limite local) [DVLP].
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a iid centrées réduites. On suppose de plus que la fonction caractéristique φ de X_1 vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^r dt < +\infty$, pour $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

Alors pour $n \geq r$, $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une densité g_n et $g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Lemmes 25 |
X va réelle, si $\varphi^X \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, $|\varphi^X(t)| < 1$.
De plus $|\varphi^X(t)| \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$

3) Modèle linéaire gaussien. [C-V chap. 1] p. 97-102

Thm 26 [Cochran]
Soient $\sigma > 0$, $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ et $V_1, \dots, V_p$ des sous-espaces vectoriels orthogonaux de dim. respectives $r_1, \dots, r_p$ tels que $V_1 \oplus \dots \oplus V_p = \mathbb{R}^n$.
Alors les projections orthogonales $\pi_1, \dots, \pi_p$ de X sur $V_1, \dots, V_p$ sont des vecteurs gaussiens indép, et
$\forall i = 1, \dots, p \quad \frac{1}{\sigma^2} \|\pi_i\|^2 \sim \chi^2_{r_i}$

Application 27 |
- On pose $\hat{\sigma}^{2\prime} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$
alors $\frac{(n-1)\hat{\sigma}^{2\prime}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ et $\hat{\sigma}^{2\prime} \perp\!\!\!\perp \hat{m}$

Donc $\frac{\sqrt{n}\,(\hat{m} - m)}{\sqrt{\hat{\sigma}^{2\prime}}} \sim \mathcal{T}_{n-1}$ où $\mathcal{T}_{n-1}$ désigne une loi de Student à $n-1$ degré de liberté
(i.e de densité $/\lambda$: $\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$

Application 28 |
- Test pur de niveau $\alpha \in]0,1[$ dans le problème de test : $H_0 : m \geq m_1$ contre $H_1 : m < m_1$:
Région de rejet : $R_1 = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \overline{x_n} \leq m_1 + t \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^{2\prime}}}{\sqrt{n}}\right\}$
où t est le quantile d'ordre α de $\mathcal{T}_{n-1}$.

- Test pur de niveau $\alpha \in]0,1[$ dans le pbm :
$H_0 : \sigma \geq \sigma_1$ contre $H_1 : \sigma < \sigma_1$. (avec $\sigma_1 > 0$ fixé).
Région de rejet : $R_2 = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \hat{\sigma}^{2\prime} < \frac{x}{n-1} \sigma_1^2\right\}$
avec x le quantile d'ordre α de la loi χ^2_{n-1}.

Références:

[OU 1] : Ouvrard Jean-Yves : probabilités 1.

[B-L] : Barbe Ledoux , Probabilité

[C-V] : Cadre Vial, Statistique Mathématique

Dev: TCL local