Leçon 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications

I/ Introduction aux VA à densité

1) Spécificité des VA à densité

[1] Def : On appelle **loi** de X la mesure $\mathbb{P}(X)$, mesure image sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{P}$ par X :
$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A)$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

[2] Def : Une VA X est à densité f_X si $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ (mesure de Lebesgue) et $\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_X \, d\lambda$, $\mathbb{P}(X\in[a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

[3] Def : Pour une VA à densité, la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

[4] Exemples

- Si X est une VA qui prend les valeurs 0 ou 1 avec la loi : $\mathbb{P}(X=0) = \alpha \in [0;1]$, $\mathbb{P}(X=1) = 1-\alpha$
Alors X n'est pas à densité car $\mathbb{P}$ n'est pas absolument continue par rapport à λ : $\lambda\{0\} = 0$ mais $\mathbb{P}(X=0)\neq 0$
- Si X est une VA qui prend ses valeurs sur $[0;1]$ avec la loi : $\forall (a,b)\in[0,1]^2, a\leq b$, $\mathbb{P}(X\in[a;b]) = b-a$
Alors X est une VA à densité, de densité $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$ et de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ x & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

On considère à présent X : une VA à densité

[5] prop / - f_X et F_X déterminent toute deux la loi de X
- Si X est à densité, alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X=x) = 0$
- $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 / a<b$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a<X<b) = \mathbb{P}(a\leq X\leq b) = \mathbb{P}(a<X\leq b) = \mathbb{P}(a\leq X<b)$
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X = 1$ et F_X est croissante
- F_X est continue, dérivable à droite, dérivable en tout point de continuité de f_X

[6] Prop / Soit X une VA réelle de densité f_X et g un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors la VA réelle $Y = g(X)$ admet une densité f_Y :
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) / (g^{-1})'(y) & \text{si } y\in g(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[7] Th de Transfert : Soit g mesurable sur $X(\Omega)$. Alors la VA $Y = g(X)$ est intégrable ssi $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x)\,d\lambda(x) < +\infty$ et $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,d\lambda(x)$

[8] Application
- Si $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,d\lambda(x) < +\infty$, alors $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,d\lambda(x)$

2) Vecteurs aléatoires, Indépendance et densité

[9] Th Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ et $(\Omega',\mathcal{F}',\mu')$ deux espaces mesurés. On suppose que la loi ν sur $(\Omega\times\Omega', \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')$ admet une densité h par rapport à $\mu\otimes\mu'$. Alors la loi image ν_π de ν par l'application $\pi : \Omega\times\Omega' \longrightarrow \Omega$, $(x,x') \longmapsto x$ admet comme densité par rapport à μ la fonction $f(x) = \int_{\Omega'} h(x,x')\,d\mu'(x')$

[10] def : On appelle vecteur aléatoire de dimension n : $X = (X_1,\dots,X_n)$ à densité f_X un n-uplet où chaque X_i est une VA (à densité) réelle.

[11] Cor Soit X un $\vec{VA}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y un $\vec{VA}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, définis sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Si $h(x,y)$ est une densité de (X,Y) par rapport à $\lambda(\mathbb{R}^{n+p})$, alors X admet la densité $f(x) = \int_{\mathbb{R}^p} h(x,y)\,d\lambda^p(y)$ (resp Y...)

[12] def Deux VA X et Y sont indépendantes ssi $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X\otimes\mathbb{P}_Y$

[13] Th : Soit X un $\vec{VA}$ à densité dans $\mathbb{R}^n$, Y un $\vec{VA}$ à densité dans $\mathbb{R}^p$.
Si X et Y sont indépendants, alors (X,Y) admet comme densité la fonction $f_X\otimes f_Y(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

[14] Th : Soit X et Y deux $\vec{VA}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{R}^p$) définis sur le même espace probabilisé. On suppose que (X,Y) admet une densité h s'écrivant sous la forme $h(x,y) = f(x)g(y)$, où f et g sont positives.
Alors : X et Y sont indépendantes de densité : $f_X(x) = \dfrac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,d\lambda^n(t)}$, $f_Y(y) = \dfrac{g(y)}{\int_{\mathbb{R}^p} g(t)\,d\lambda^p(t)}$

[15] ex : X et Y sont des VA indépendantes de densités $f_X(x) = f_Y(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
$\Leftrightarrow (X,Y)$ est un $\vec{VA}$ de densité $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\times\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

[16] prop / 1) Si X et Y sont deux VA à densités indépendantes, alors :
X+Y est à densité, de densité $f_X * f_Y$
2) Si seule X est à densité, alors :
X+Y est de densité $f_X * \mathbb{P}_Y$: $f_X * \mathbb{P}_Y(x) = \int f(x-t)\,d\mathbb{P}_Y(t)$

[17] def : La fonction caractéristique du $\vec{VA}$ X : Φ_X est la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par
$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{itx}\,d\mathbb{P}_X(x)$$

[18] Th : Soient X et Y deux $\vec{VA}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
X et Y sont indépendants ssi (X,Y) est un $\vec{VA}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ tel que
$\Phi_{(X,Y)}(s,t) = \Phi_X(s)\cdot\Phi_Y(t)$

[19] Th : Soient X et Y deux $\vec{VA}$ de $\mathbb{R}^n$ indépendants, alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\cdot\Phi_Y(t)$

⚠ Réciproque fausse.

[19,5] Th Soit X et Y indep. Alors $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

Application en [37]

II/ Quelques lois importantes (Dessins en annexe)

1) Loi uniforme

] **Def** : On dit qu'une VA X suit une loi uniforme sur un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ s'il admet la densité : $f_X : x \mapsto \frac{1}{\lambda(K)} \mathbb{1}_K(x)$. On note $X \sim \mathcal{U}(K)$

] **prop** Soit $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Alors

- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$
- $E(X) = \frac{b-a}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\Phi_X(t) = e^{i\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\sin((b-a)t)}{(b-a)t}$

2] **exemple** $X \sim \mathcal{U}([0,1])$: $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$; $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $\Phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$

$E(X) = 1/2$; $V(X) = \frac{1}{12}$

3] **prop** Tout $x \in [0,1]$ peut s'écrire en base 2 sous la forme : $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^k}$, $x_k \in \{0,1\}$. Une telle écriture est appelée décomposition dyadique de x

4] **Th** Soit $X = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$.

$X \sim \mathcal{U}([0,1])$ ssi les X_k sont iid et suivent une loi $\mathcal{B}(1/2)$

DEV 1 !

5] **Th** : Inversion de la fonction de répartition

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, croissante, continue à droite tq $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

On suppose que sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. On pose :

$\forall u \in [0,1]$, $Q^*(u) = \min\{x \in \mathbb{R}, 1 - F(x) \leq u\}$

Alors $Q(u)$ est une VA réelle dont F est la fonction de répartition

6] **Cor** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant ces mêmes hypothèses.

Alors : Il existe une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont F est la fonction de répartition.

2) Loi exponentielle

27 **Def** : Une VA suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\in \mathbb{R}_+^*$) si elle admet pour densité : $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On note : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

28 **prop** Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Alors

- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = 1/\lambda^2$
- $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

29 Soit X une VA positive. Alors X suit une loi exponentielle ssi elle est sans mémoire, c'est à dire : $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s) > 0$

Dev 2 !

30 **Exemple** Distribution de Laplace

$X \sim \mathcal{L}(\lambda)$ ssi $f_X(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |x|}$

31 **Exemple** Densité de Rayleigh - Fonction Taux de panne

Soit X une VA de densité $f_X(x) = (a + bx) e^{-\frac{ax + bx^2}{2}}$, $x \geq 0$ et de fonction de répartition $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{ax + bx^2}{2}}$

Alors f_X est une densité de Rayleigh et $\lambda : t \mapsto \frac{f_X(t)}{1 - F(t)}$ est la fonction taux de panne

3) Loi de Cauchy

32 **Def** Une VA X suit une loi de Cauchy (a,b) si elle admet pour densité :

$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}$

33 **prop** $\Phi_X(t) = e^{iat - b|t|}$

34 **prop** La loi de Cauchy n'admet pas de moment d'ordre 1 (ou supérieur)

4) Loi Gamma

35 **Def** : Une VA X suit une loi Gamma $(a, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ si elle admet la densité :

$f_X(x) = \gamma^a x^{a-1} e^{-\gamma x}$ [illegible]

36 Prop
- $\Phi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\gamma}\right)^{-\alpha}$
- $E(X) = a/\gamma$
- $V(X) = a/\gamma^2$

37 Prop Si $X \sim \Gamma(a,\gamma)$, $Y \sim \Gamma(b,\gamma)$ indépendantes. Alors :
$X+Y \sim \Gamma(a+b,\gamma)$

III / Un exemple majeur : La loi normale

1) Variables et vecteurs gaussiens

Idef :
- On dit qu'une VA X suit une loi gaussienne (ou normale) de paramètres (m,σ^2), noté $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si elle admet la densité
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$
- Un $\vec{VA}$ $X \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si $\forall a \in \mathbb{R}^d$, la VA $\langle X, a\rangle$ est gaussienne

9 Th : L'image d'un $\vec{VG}$ X, d'espérance m_X et de matrice de covariance C_X par une application affine $x \mapsto Ax+B$ est un $\vec{VG}$ $Y = AX+B$ d'espérance $m_Y = Am_X + B$ et de matrice de covariance : $C_Y = AC_XA^*$ (Appli : VAG centrée réduite)

0 Cor : Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est gaussien, alors pour tout $I \subset \{1,\dots,d\}$, le $\vec{VA}$ $(X_i)_{i\in I}$ est gaussien

1 Prop Soit $X_1, \dots, X_d$ des VA gaussiennes indépendantes. Alors $(X_1, \dots, X_d)$ est un $\vec{VG}$.

2 Th : Soit $C \in S_d^{++}(\mathbb{R})$ et $m \in \mathbb{R}^d$. Alors on peut construire un $\vec{VG}$ admettant m comme espérance et C comme matrice de covariance.

3 Th : Soient X et Y deux $\vec{VG}$ ayant même espérance et matrice de covariance. Alors X et Y ont même loi

4 Th : Soient $X_1, \dots, X_n$ de VA gaussiennes.
Les X_i sont deux à deux indépendantes
$\Leftrightarrow$ le vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)$ a une matrice de covariance est diagonale

45 Prop Soit $X \sim \mathcal{N}(m, C)$ est un $\vec{VG}$ de $\mathbb{R}^d$, alors :
- $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(x-m), x-m\rangle\right)$
- $\Phi_X(t) = e^{i\langle t,m\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Ct,t\rangle}$

(Rq : Φ_X ne dépend pas de d)

2) Liens avec d'autres lois

46 Deux Lemmes préliminaires au...
- On a : $\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{p} \frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \min\left(\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}, \frac{2|x|^p}{p!}\right)$
$\Rightarrow \left|\Phi_X(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{i^k t^k}{k!} E(X^k)\right| \leq E\left(\min\left(\frac{t^{p+1}|X|^{p+1}}{(p+1)!}, \frac{2t^p|X|^p}{p!}\right)\right)$
- Soient $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq n)$ avec $|a_i|, |b_i| \leq 1$, alors
$\left|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$

47 Théorème Central Limite (Dev3) !!
Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de VA réelles iid dans L^2 d'espérance m et de variance σ^2. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors :
$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

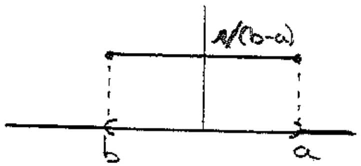
48 Th de Cochran
Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un $\vec{VG}$ centré réduit, F un sous-ev de $\mathbb{R}^n$ de $\dim(F) = p$ et P_F (resp $P_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp $F^\perp$)
Alors les $\vec{VG}$ $P_F X$ et $P_{F^\perp} X$ sont gaussiens, indépendants, de lois $P_F(X) \sim \mathcal{N}(0, P_F)$, $P_{F^\perp}(X) \sim \mathcal{N}(0, P_{F^\perp})$ et
$\|P_F X\|^2 \sim \chi^2_p$, $\|P_{F^\perp} X\|^2 \sim \chi^2_{n-p}$, où...

49 Def Si X est un $\vec{VG}$ de $\mathbb{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$, alors $\|X\|_2^2$ est une VA à densité dont la loi est la loi du Chi-Deux à n degrés de libertés.
On note $X \sim \chi^2_n$

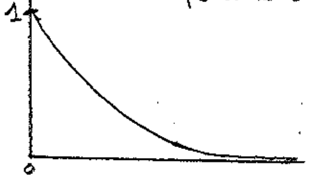
50 Prop $\chi^2_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Annexe

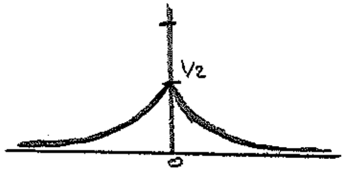
Loi uniforme



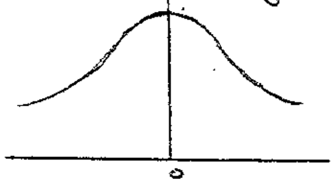
Loi exponentielle



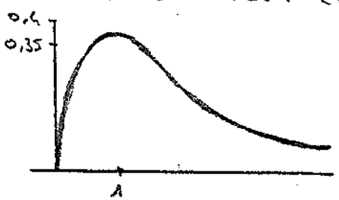
Loi de Laplace



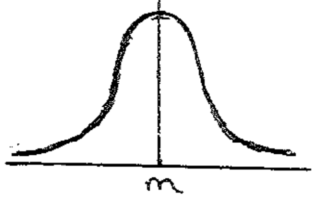
Loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$



Loi Gamma $\Gamma(2,1)$



Loi normale



Biblio

Ouvrard - Probabilités 1 et 2
Ross - Initiation aux probabilités
Garet - De l'intégration aux probabilités
L3 Maths appliquées
Poly J.C. Breton