263

Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Cadre : On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

I- Variables aléatoires à densité.

1. Définitions et quelques propriétés.

Déf 1 : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{P}_X$ sa loi. S'il existe une fonction f_X définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs positives, intégrable telle que : $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx = 1$ et que : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx.$$

Alors on appelle cette fonction densité de la variable aléatoire X.

Déf 2 : Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$; $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est appelée fonction de répartition de la v.a. X.

Rq 3 : si X admet une densité f_X, on a $\forall a < b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

Prop 4 : Soit X une v.a. réelle de fonction de répartition F_X,

(i) la fonction F_X détermine entièrement la loi de X.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$; $\lim_{+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{-\infty} F_X(x) = 0$

(iii) F_X est une fonction croissante, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.

(iv) si X admet une densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy.$$

Rq 5 : une v.a. qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ est dite loi diffuse. Cette propriété n'entraîne pas que la v.a. admette une densité.

Déf 6 : Soit X une v.a. réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si X est intégrable On appelle espérance de X le nombre réel :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X\,d\mathbb{P}$$

De plus, X est dite centrée si elle est intégrable et $\mathbb{E}[X] = 0$

Th 7 : [Transfert] soit X une v.a. réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et φ une fonction mesurable positive, alors :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi \circ X\,d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x)\,dx.$$

Déf 8 : Soit X une v.a. réelle dont le carré est intégrable, on appelle variance de X, la quantité :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

La racine $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ est appelée l'écart-type et on le note σ_X. Une v.a d'écart-type 1 est dite réduite.

Déf 9 : si $X \in L^p$, $p > 0$, on définit le moment absolu d'ordre p de X par $\mathbb{E}[|X|^p] = \int |X|^p\,d\mathbb{P}$. Si p est entier on peut aussi définir le moment d'ordre p : $\mathbb{E}[X^p] = \int X^p\,d\mathbb{P}$.

2. Exemples de lois usuelles.

• loi uniforme :

Déf 10 : Pour $a < b \in \mathbb{R}$, on dit que X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ si elle admet $\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ comme densité.

Prop 11 : On a $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

• Loi normale :

Déf 12 : $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on dit que X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Prop 13 : On a alors $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Loi Gamma :

Def 14 : On dit que X suit une loi Gamma de paramètre $a>0$ et $\lambda>0$ si elle admet pour densité $x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

si $a=1$, on dit qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Dev 1 Partie 1

Prop 15 : On a alors : $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Rq 16 : toutes les lois usuelles n'ont pas de moment par exemple la loi de Cauchy.

Rq 17 : Voir en annexe pour un tableau récapitulatif des lois à densité usuelles.

II - Opérations sur les densités.

Prop 18 : [v.a. transformée par difféo] Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et T un difféo de $\mathbb{R}^d$. Si X admet une densité f_X alors la v.a. $Y = T \circ X$ admet une densité f_Y définie par :

$$f_Y(y) = |\det(T^{-1})'(y)| \, f_X(T^{-1}(y))$$

Prop 19 : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, si X admet une densité f_X alors X_1 et X_2 admettent des densités f_{X_1} et f_{X_2} :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^{d_1} : \quad f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_X(x_1,x_2)\, dx_2$$

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}^{d_2} : \quad f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_X(x_1,x_2)\, dx_1$$

$\chi^n_2 \longleftrightarrow \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

Ex 20 : Soit X une v.a dans $\mathbb{R}^2$ qui admet la densité : $\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}\right)$

Alors les marginales suivent une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Prop 21 : Soit X_1, X_2 deux v.a. on a l'équivalence entre :

(i) les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.

(ii) $\forall f_1, f_2$ fonction réelles positives (ou bornées) on a :
$\mathbb{E}[f_1(X_1) f_2(X_2)] = \mathbb{E}[f_1(X_1)]\, \mathbb{E}[f_2(X_2)]$

Coro 22 : Soit X_1 et X_2 deux v.a.

① Si elles admettent des densités f_{X_1} et f_{X_2} et sont indep. alors la v.a (X_1,X_2) admet une densité : $f_{(X_1,X_2)} = f_{X_1} f_{X_2}$.

② Si le couple (X_1,X_2) admet une densité $f_{(X_1,X_2)}$ qui vérifie $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^d : f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ où f_i sont intégrables et positives $i \in \{1,2\}$.

Alors : $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ et $f_{X_1} = f_1$ et $f_{X_2} = f_2$

Prop 23 : Soit X_1, X_2 deux v.a. indep. qui admettent des densités f_{X_1} et f_{X_2}.

Alors $X_1 + X_2$ admet une densité $f_{X_1+X_2}$ telle que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d : \quad f_{X_1+X_2}(y) = f_{X_1} * f_{X_2}(y) = f_{X_2} * f_{X_1}(y).$$

Ex 24 : Soit $X_i \sim \gamma(a_i, p)$ $i \in \{1,2\}$. (X_i indépendantes).

alors : $X_1 + X_2 \sim \gamma(a_1+a_2, p)$.

III - Fonction caractéristique et transformée de Laplace.

Def 25 : soit X v.a. à val. dans $\mathbb{R}^d$, on appelle fonction caractéristique de X, et on note φ_X, la fonction à valeurs complexe :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(i\langle t, X\rangle)].$$

Rq 26 : si X est une v.a. à densité f on a alors :

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(i\langle t,x\rangle)\, dx$$

On remarque que cette fonction est aussi la transformée de Fourier de f.

Th 28 : Soit X et Y deux v.a. de loi P_X et P_Y tq :
$\varphi_X = \varphi_Y$ alors $P_X = P_Y$.

App 29 : Calcul de la loi de la somme de deux v.a. gaussienne.

Ex 30 :
- $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{it(b-a)} (e^{itb} - e^{ita})$
- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\varphi_X(t) = \exp(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2})$
- $X \sim \mathcal{E}(p)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - it/p}$

$\mathcal{E}(\lambda)$ est la seule loi ~~[à densité]~~ sans mémoire (version continue).

Dev 1 Partie 2

- si $X \sim \gamma(a,p)$ alors $\varphi_X(t) = (1-it/p)^{-a}$

Th 31 : [Formule d'inversion de Fourier] Soit X une v.a. et φ_X sa fonction caractéristique. Alors X admet une densité continue et bornée f_X :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \quad f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle} \varphi_X(t)\, dt.$$

Calculer φ_X pour X cauchy.

$$e^{-|x|} \downarrow \frac{1}{1+x^2}$$

App 32 : Calcul de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy.

Prop 34 : Soit X une v.a. réelle et φ_X sa fonction caractéristique

(i) si X admet un moment d'ordre n, alors φ_X est n fois dérivable et $\forall k \le n$; $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$

(ii) Réciproquement, si n est pair et φ_X n fois dérivable en 0, alors X admet un moment d'ordre n.

Th 35 : Soient X, Y deux v.a. réelles sur un intervalle borné si $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ $\forall k \in \mathbb{N}$, alors X et Y on même loi.

Def 36 : si X est une v.a. dans $\mathbb{R}^d$, on appelle transformée de Laplace la fonction : $L_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\langle \lambda, X\rangle}]$ définie pour les val. des pour lesquelles $e^{\langle \lambda, X\rangle}$ est intégrable.

Prop 37 : La transformée de Laplace d'une v.a. X caractérise la loi comme la transformée de Fourier.

Dev 1 partie 2 bas

Ex 38 : calcul de la transfo de Laplace d'une loi $\gamma(a,p)$

$$L_X(\lambda) = (1 - t/p)^{-a}.$$

IV - Applications.

- Théorème central limite :

Th 39 : [Lévy] si $(X_n)_n$ sont des v.a. de fonction caract. $(\varphi_n)_n$ et si $(\varphi_{X_n})_n$ C.V.S vers φ_X alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

Th 40 : [TCL] Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. iid dans L^2. Alors : $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ Dev 2

App 41 : Soit (X_n) une suite de v.a. iid de loi $B(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ à déterminer. Posons $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Alors $\lim_{+\infty} \mathbb{P}\left(\theta \in \left[\overline{X_n} - \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}} ; \overline{X_n} + \frac{q_\alpha}{\sqrt{2n}}\right]\right) \geq 1-\alpha.$

intervalle de confiance asymptotique.

- Simulation de lois à densité.

Def 42 : Soit F une fonction de répartition. On définit son inverse généralisée par $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$G(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\}.$$

Prop 43 : Si $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $G(Y)$ admet F pour fonction de répartition.

Rq 44 : Ce résultat permet de simuler toute loi sur $\mathbb{R}$ à partir de v.a. uniforme.

Ex 45 : si $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ (fct° de rep. d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$) on a $G(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$ i.e. si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ on a aussi $1-U \sim \mathcal{U}(0,1)$ donc $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Prop 46 : si $S \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $\theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ en posant $X = \sqrt{S}\cos\theta$ et $Y = \sqrt{S}\sin\theta$. Box - Muller

Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Méthode de Rejet. (comparatif)

↳ procédés qui permet de simuler toute loi (ss densité) à partir de uniforme (qui est à → densité).