Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes

I - Cas d'une variable aléatoire discrète

I.1 - Variable aléatoire discrète (v.a.d.), loi de probabilité

Définition 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble. Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète (v.a.d.) si elle vérifie (i) et (ii) suivant :
(i) $X(\Omega)$ est dénombrable
(ii) $\forall x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Remarque 2 : • souvent, $E \subset \mathbb{R}$, $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, ou E fini
• si $\mathcal{A}$ est la tribu des parties de Ω, toute fonction $\Omega \to E$ est une v.a.d.

Définition 3 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to E$ une v.a.d. La loi de probabilité de X est la fonction :

$$E \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto P(X=x) := P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\})$$

Exemple 4 : (Figure 1) : la loi de probabilité d'une v.a.d. comptant la somme des nombres obtenus lors du jet de deux dés équilibrés.

I.2 - Exemples fondamentaux

I.2.1 - Loi uniforme :

Supposons que $X(\Omega) = [\![1 ; n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. X est de loi uniforme si $P(X=k) = \frac{1}{n}$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 5 : la variable qui à un jet d'un dé équilibré renvoie son résultat : $P(X=k) = \frac{1}{6}$ $\forall k \in [\![1, 6]\!]$ (Figure 2)

I.2.2 - Variable de Bernoulli

Définition 6 : Une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ est une v.a.d. X ne prenant que les valeurs 0 et 1 et telle que $p = P(X=1)$.

Exemple 7 : On lance n pièces équilibrées et on définit pour $j \in [\![1 ; n]\!]$ X_j par X_j vaut 1 si la $j^{\text{ème}}$ pièce donne face et 0 sinon. X_j est alors une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

I.2.3 - Loi Binomiale (Figure 3)

Définition 8 : Une v.a.d. X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), notée $\mathcal{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, si :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q := 1-p$$

Exemple 9 : En reprenant l'exemple 7, en notant Y la v.a.d. qui compte le nombre de faces obtenues au cours des n lancers, Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

I.2.4 - Loi Géométrique

Définition 10 : X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = pq^{k-1}$ où $q := 1-p$

Exemple 11 : on lance une pièce qui tombe sur face avec probabilité p. En notant X le nombre de lancers jusqu'au premier "face", on a $P(X=k) = pq^{k-1}$ (Figure 4)

I.2.5 - Loi de Poisson

Définition 12 : Soit $\lambda > 0$. Une v.a.d. X suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si : $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

I.3 – Moments d'une v.a.d.

I.3.1 – Espérance :

Définition 13 : Soit X une v.a.d. telle que $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x)$ soit finie. L'espérance de X, notée $E(X)$ est définie par :
$$E(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Exemples 14 : •1) X v.a.d. de loi uniforme, avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, alors :
$$E(X) = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$$

•2) X Bernoulli de paramètre p, $E(X) = p$

•3) X suit $\mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$

•4) X de loi géométrique de paramètre p, $E(X) = \frac{1}{p}$

•5) X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$

rev **Théorème 16** : (Weierstrass). Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par
$$B_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{array}$$
Alors $(B_n)_n$ converge uniformément vers f.

Théorème 15 (théorème de transfert) : Soit $X : \Omega \to E$ une v.a.d. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Alors $Y = f \circ X$ est une v.a.d.. Alors, si $\sum_{x \in E} |f(x)| P(X=x)$ est finie, on a :
$$E(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) P(X = x)$$

Application 17 : Soit X une v.a.d. d'espérance $E(X)$ finie. Alors, pour a, b deux constantes, on a :

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$

(ii) $(P(X = b) = 1) \Rightarrow E(X) = b$

(iii) $(P(a < X \leq b) = 1) \Rightarrow a < E(X) \leq b$

(iv) si $g(X)$ et $h(X)$ sont d'espérance finie, alors
$$E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(X)).$$

I.3.2 – Moments d'ordre supérieurs

Définition 18 : Soit X une v.a.d. telle que $\sum_{x \in E} |x|^k P(X = x) < +\infty$.

(i) le k-ième moment de X est $\mu_k = E(X^k)$

(ii) le k-ième moment centré de X est $\sigma_k = E((X - E(X))^k)$

σ_2 est la variance de X notée $\mathrm{var}(X)$, et l'écart-type de X est $\sqrt{\mathrm{var}\, X}$.

(iii) Si $\mathrm{var}\, X \neq 0$, $\tilde{X} := \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{var}\, X}}$ est dite centrée réduite. On a $E(\tilde{X}) = 0$ et $\mathrm{var}\, \tilde{X} = 1$

II – Couples, sommes de v.a.d.

II.1 – Indépendance

Définition 19 : Deux v.a.d. X et Y sont indépendantes si $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a :
$$P(X = x, Y = y) := P(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Proposition 20 : Si $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$ sont deux v.a.d. indépendantes, et si $f : E_1 \to \mathbb{R}$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

II.2 – Loi d'une somme de v.a.d. indépendantes

Proposition 21 : Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a.d indépendantes. Alors $X + Y$ est une v.a.d. dont la loi est donnée par :
$$\forall x \in E, \ P(X + Y = x) = \sum_{x_1 \in E} P(X = x_1) P(Y = x - x_1)$$

Exemples 22 : •1) Si X suit $\mathcal{B}(n_1,p)$, X peut s'écrire comme somme de n_1 v.a.r. de Bernoulli de param. p. Si Y suit $\mathcal{B}(n_2,p)$, alors $X+Y$ suit $\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$ •2) Si X suit $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et Y suit $\mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X+Y$ suit $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$

Application 23 : (Théorème de Le Cam) $\boxed{\text{DEV 2}}$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ espace probabilisé, S_n v.a. réelle de $(\Omega,\mathcal{A},P)$. S'il existe $X_1,\dots,X_n$ des v.a. réelles indépendantes de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de lois de Bernoulli de paramètres $p_1,\dots,p_n\in\,]0,1[$ telles que $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, alors $\exists Z$ une v.a. réelle de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de loi de Poisson $\sum_{i=1}^{n} p_i$ telle que :

$$\sup_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}|P(\{S_n\in B\})-P(\{Z\in B\})|\leq\sum_{i=1}^{n}p_i^2$$

II.3 - Espérance d'une somme

Théorème 24 : Si g est une fonction réelle de X et Y deux v.a.d., si le membre de droite ci-dessous converge, on a :

$$E(g(X,Y))=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} g(x,y)P(X=x,Y=y)$$

Application 25 : $\forall a,b$ constantes, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ lorsque ces termes existent.

Application 26 : $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Exemples 27 : •1) si X a une loi $\mathcal{B}(n,p)$, $Var(X)=np(1-p)$

•2) si X a une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $Var(X)=\lambda$

•3) si X suit une loi géométrique de paramètre p, $Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$

III - Théorèmes limites

III.1 - Approximation de loi de Poisson

Théorème 28 : Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>\lambda$ et S_n une v.a. suivant une loi binomiale de paramètre $(n,\frac{\lambda}{n})$. Soit Z une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.

Applications 29 : Les situations suivantes peuvent être approchées par des lois de Poisson :
(i) le nombre de coquilles par pages ou groupe de pages d'un livre
(ii) le nombre d'individus dépassant 100 ans dans une communauté
(iii) le nombre de clients pénétrant dans un bureau de poste sur une journée.

III.2 - Loi faible des grands nombres

Définition 30 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.. On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si $\forall\varepsilon>0$,

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0. \text{ On note } X_n\xrightarrow{P}X$$

Théorème 31 : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes, de même espérance et variance finie $\mu=E(X_1)$, $\sigma^2=Var(X_1)$.

$$\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)\xrightarrow{P}\mu$$

Exemple 32 : Si on lance n fois une pièce, plus n est grand plus la probabilité d'être loin de la moyenne est faible

III.3 - Loi forte des grands nombres

Définition 33 : $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X, noté $X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}X$ si $P(X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}X)=1$

Théorème 34 : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, avec $E(|X_1|)<+\infty$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{p.s.}E(X_1)$$

Exemple 35 : $\forall\varepsilon>0$, avec probabilité 1, la moyenne du nombre de faces obtenues sur des lancers de pièce sera à distance $>\varepsilon$ de 1/2 seulement un nombre fini de fois.

ANNEXE

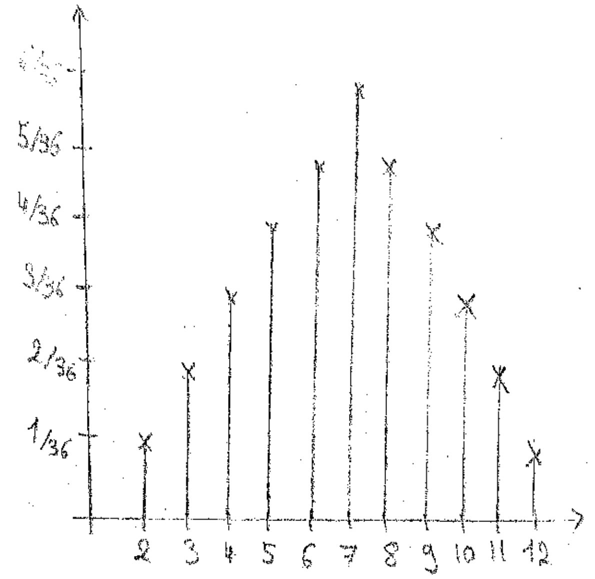

Figure 1 : loi de probabilité de la somme de deux dés

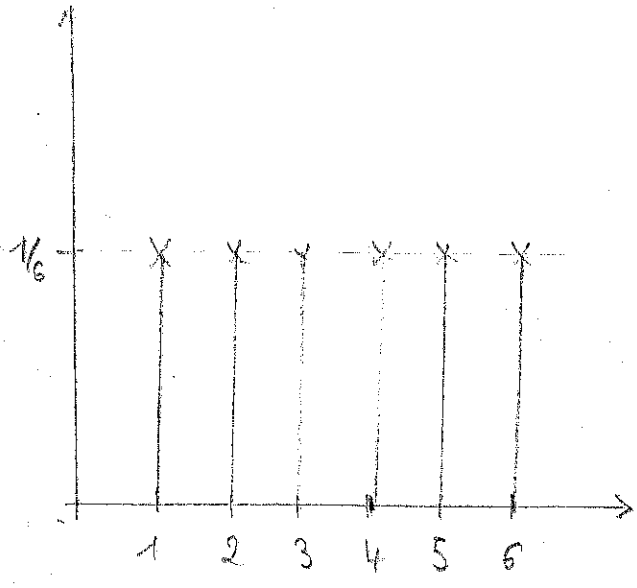

Figure 2 : loi uniforme

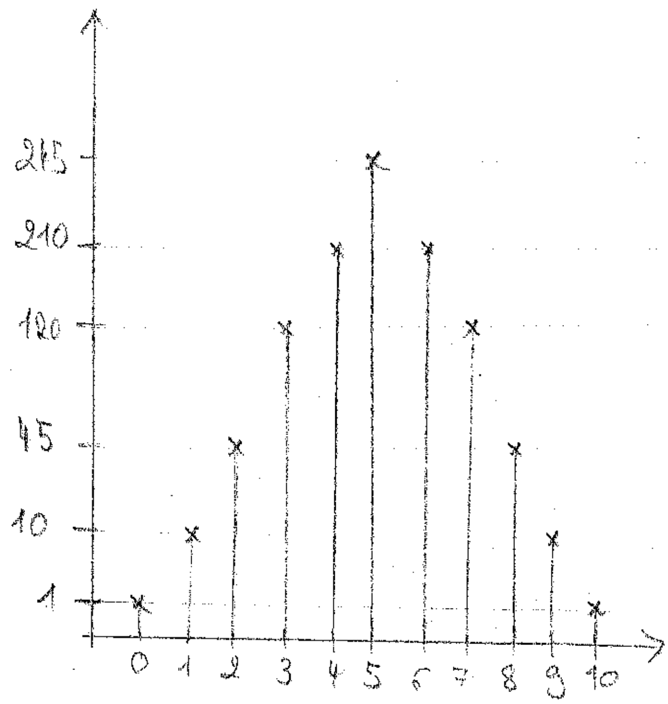

Figure 3 : $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$

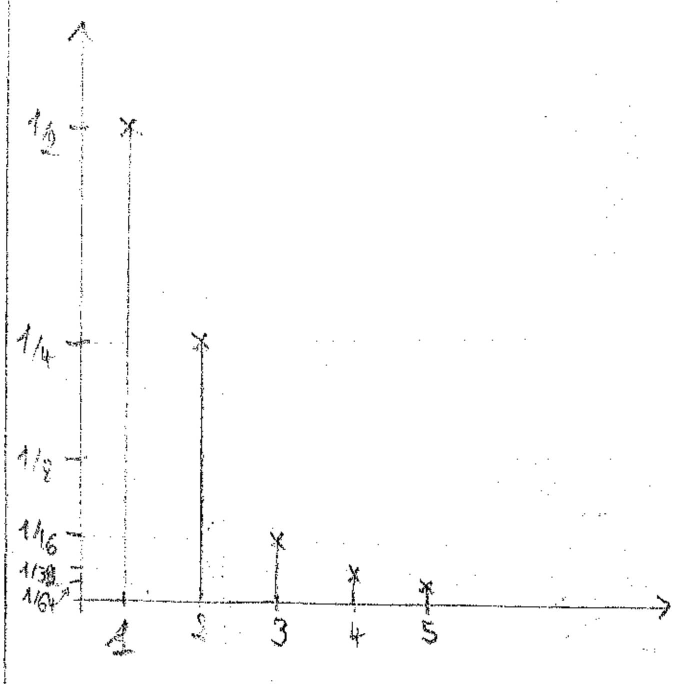

Figure 4 : loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$