Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

264

I- Variables aléatoires discrètes.

1) Définition:

[OUV-I]

Déf 1: Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et soit E un ensemble. On dit qu'une application X de Ω dans E est une variable aléatoire discrète si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

i) L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est dénombrable.

ii) Pour tout $x \in E$, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

[BAR]

Déf 2: Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. La loi de probabilité de X est la fonction:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) \end{aligned}$$

2) Exemples fondamentaux de lois de probabilités discrètes

a- Loi Uniforme:

[OUV-I]

Déf 3: Supposons $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X est de loi uniforme si:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \forall k \in [\![1, n]\!]$$

on la note $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

Ex 4: Pour le lancer d'un dé, la v.a X égale au chiffre obtenu suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

b- Loi de Bernoulli

[BAR]

Déf 5: Une v.a X, à valeur dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{B}(1, p)$ si:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Ex 6: Pour $p = \frac{1}{2}$, la loi peut modéliser le jet d'une pièce équilibrée. On a alors $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$

c- Loi Binomiale:

Déf 7: Une v.a X, à valeurs entières, suit une loi binomiale de taille $n \geq 1$ et de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{B}(n, p)$ si: [BAR]

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in [\![0, n]\!]$$

Ex 8: Si une urne contient n boules, une proportion p d'entre elles étant noires, $1-p$ étant blanches, et si l'on tire au hasard avec remise n boules, le nombre de boules noires tirées suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$

d- Loi géométrique:

Déf 9: Une v.a X, à valeurs entières, suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si: [OUV-I]

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Ex 10: Cette loi est la loi d'une v.a qui compte le nombre d'échec avant le 1er succès d'une épreuve à deux issues. [GIR]

e- Loi de Poisson:

Déf 11: Une v.a X, à valeurs entières, suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, si: [BAR]

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ex 12: C'est la loi des v.a décrivant l'apparition d'événements rares, nombres d'accidents, d'erreurs de fabrication, d'individus atteints d'une maladie. [GIR]

f- Loi Hypergéométrique

Déf 13: Une v.a X suit une loi hypergéométrique de paramètres entiers non nuls N, M et n, avec $M < N$ [GIR] et $n \leq M$ et nous noterons $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$ si :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad , 0 \leq k \leq \min(M,n)$$

Ex 14 : On tire n boules d'une urne sans remise contenant N boules dont M blanches. Soit X la v.a égale au nombre de boules blanches obtenues. Alors $X \sim \mathcal{H}(N,M,n)$

II - Moments d'une variable aléatoire discrète.

1) Espérance :

[COUV-1] Déf 15 : Soit X une v.a réelle discrète. Si la somme $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| \mathbb{P}(X=x)$ est finie, on définie son espérance par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, \mathbb{P}(X=x)$$

[COUV-1] Ex 16 : . $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$
- $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $X \sim \mathcal{H}(N,M,n)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{nM}{N}$

[COUV-1] Théorème 17 : (de Transfert)

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une v.a discrète. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $Y = f \circ X$ est une v.a discrète. Pour que Y admette une moyenne il faut et il suffit que :

$$\mathbb{E}[f(x)] = \sum_{x \in E} |f(x)| \, \mathbb{P}(X=x) \text{ soit finie.}$$ Dans ce cas on a : $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) \mathbb{P}(X=x)$$

[QUE] p. 518 DEV 1

Application 18 : (Théorème de Weierstrass)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue sur $[0,1]$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$B_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

alors $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

2) Moments d'ordres supérieurs

Déf 19 : Si p est un entier ≥ 1 et si X appartient à l'ensemble des v.a discrètes réelles X telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$, le nombre $\mathbb{E}(X^p)$ est appelé moment d'ordre p de X. [COUV-1]

Déf 20 : Un moment d'ordre 2 est appelé variance et on a la formule de Huyghens qui permet de la calculer :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ex 21 . Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

- Si $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ alors $\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
- Si $X \sim \mathcal{H}(N,M,n)$ alors $\mathrm{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$

III - Indépendance et somme de v.a discrète.

1) Indépendance :

Déf 22 : Si les v.a X_1 et X_2 sont discrètes, il en est de même de la v.a (X_1, X_2). Pour que les v.a X_1 et X_2 soient indépendantes il faut et il suffit que : [COUV-8]

$\forall x_1 \in X_1(\Omega)$ et $\forall x_2 \in X_2(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 , X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

Prop 23 : Soient X_1 et X_2 deux v.a réelles définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et indépendantes. Alors si X_1 et X_2 admettent une moyenne, il en est de même de la v.a $X_1 X_2$ et on a $\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

2) Somme de v.a indépendantes discrètes

Déf 24 : On dit que la loi de proba discrète, obtenue à partir [COUV-1] de $\mathbb{P}_{X_1}$ et $\mathbb{P}_{X_2}$ par la relation :

$\forall x \in E$, $\mathbb{P}_{X_1+X_2}(\{x\}) = \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}_{X_1}(\{x_1\})\mathbb{P}_{X_2}(\{x - x_1\})$, est le produit de convolution des deux proba $\mathbb{P}_{X_1}$ et $\mathbb{P}_{X_2}$. Elle est notée $\mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}$

[BAR] Déf 25: Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X, et on note φ_X, la fonction à valeurs complexes :

$$t \in \mathbb{R}^d \longmapsto \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle})$$

Prop 26: Si X et Y sont deux v.a réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors : $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$

[OUV-1] Ex 27: Soit X_1 et X_2 deux v.a indépendantes :
- si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$
- si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ alors : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$

Rq 28: Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une suite de v.a de Bernoulli indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n$ est de loi $\mathcal{B}(n,p)$

[OUV-2] [OUV-2] 54 Théorème 29: La v.a $X = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$ est de loi $\mathcal{U}([0,1])$ ssi les v.a X_k sont iid et de loi $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

IV - Théorème limite :

1) Loi des grands nombres

[BAR] Déf 30. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X des v.a réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X_n cv en proba vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

[ROS] Thm 31: (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a iid, si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ alors :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

Déf 32: Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X des v.a réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement (ps) vers X si : [OUV-2]

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}) = 1$$

Thm 33: (Loi forte des grands nombres) (admis) [ROS]

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a iid, avec $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, alors

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_1)$$

Ex 34: Jeu de pile ou face. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi $\mathcal{B}(1,p)$ alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ p.s

2) Approximations :

Déf 35: Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X, des v.a réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X_n cv en loi vers X si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ [BAR]

Thm 36: (limite central Poissonien) [BAR]
Soit S_n une v.a de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n\to+\infty} n p_n = \lambda > 0$. S_n cv en loi vers une v.a de Poisson de paramètre λ.

Rq 37: Dans la pratique, on remplace la loi binomiale par la loi de Poisson quand n est d'ordre 30 et p d'ordre 0,1.

Prop 38: Si $X_N \sim \mathcal{H}(N,n,p)$ alors X_n cv en loi quand $N \to +\infty$ vers $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ [ROS]

Références :

[OUV-1] : "probabilités 1", Ouvrard
[OUV-2] : "probabilités 2", Ouvrard
[BAR] : "L3 M1 Probabilité", P. Barbe et M. Ledoux
[ROS] : "Initiation aux probabilités", M. Ross
[GIR] : "Proba et intro à la statistique", V. Girardin ; N. Limnios
[QUE] : "Analyse pour l'agrégation" Zuily - Queffélec

Développement dyadique

<u>Rappel</u> : Tout $x \in [0,1]$ peut s'écrire sous forme $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i}$ où $x_i \in \{0,1\}$

Une telle écriture est appelée décomposition dyadique de x.

<u>Théorème</u> : La va $X = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$ est de loi $\mathcal{U}([0,1])$ ssi les va X_k sont iid et de loi $b(1/2)$

<u>Démonstration</u> :

"$\Leftarrow$" Supposons $(X_k)_k$ une suite de va iid de loi $b(1/2)$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$
$$= \mathbb{E}[e^{it\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}}]$$
$$= \mathbb{E}[\lim_{+\infty} \exp(it \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k})] \quad \text{car } x \xrightarrow{h} e^{itx} \text{ est continue}$$
$$= \lim_{+\infty} \mathbb{E}[\exp(it \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k})] \quad \text{par le théorème de convergence dominée}$$
$$= \lim_{+\infty} \mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} \exp(it \frac{X_k}{2^k})]$$
$$= \lim_{+\infty} \prod_{k=1}^{n} [\mathbb{E} \exp(it \frac{X_k}{2^k})] \quad \underset{(X_k)_k \text{ iid}}{\text{car}} \ h \text{ est borélienne (et } h\left(\frac{X_k}{2^k}\right) \in L^1)$$
$$= \lim_{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right)$$
$$= \lim_{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+e^{it/2^k}}{2}$$
$$= \lim_{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{it/2^{k+1}}\left(e^{-it/2^{k+1}} + e^{it/2^{k+1}}\right)}{2}$$
$$= \lim_{+\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{it/2^{k+1}} \cos(t/2^{k+1})$$
$$= \lim_{+\infty} \underbrace{e^{it\sum_{k=1}^{n} 1/2^{k+1}}}_{=1/2} \prod_{k=1}^{n} \cos(t/2^{k+1})$$

Or $\sin(t) = 2\cos(t/2)\sin(t/2)$

d'où $\sin(t/2) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$

d'où $\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right) = \lim_{+\infty} \frac{\sin(t/2)}{2^n \sin(t/2^{n+1})}$

$$= \frac{2\sin(t/2)}{t}$$
$$= \frac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{it}$$

On a alors $\varphi_X(t) = e^{it/2} \times \frac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{it}$ d'où $\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$; ainsi $X \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \leq X \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=1+n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \leq X \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

d'où $\mathbb{P}(X_n = x_n) = \sum_{\substack{x_1 \in \{0,1\} \\ \vdots \\ x_n \in \{0,1\}}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)$

$$= 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim b(1/2)$

$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots X_n = x_n) = \frac{1}{2^n}$

$$= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \qquad \forall x_1 \dots x_n \in \{0,1\}$$

d'où $X_1, \dots, X_n$ sont iid pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi la suite $(X_i)_{i \geq 1}$ est iid et de loi $b(1/2)$

Référence : - "Probabilité, exercices corrigés" Hervé Carrieu

- "Probabilités" Ouvrard 2

Théorème d'approximation de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Référence : Zuily-Queffélec : Analyse pour l'agrégation p. 518

Théorème (Théorème de Bernstein - 1912)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose

$$\omega(h) := \sup\{|f(u) - f(v)|, |u - v| \leqslant h\}$$

son module de continuité [1] uniforme.
On considère

$$B_n(f,x) = B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f. Alors

(1) (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

(2) $\|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où C est une constante.

(3) L'estimation (2) est optimale : il existe f lipschitzienne telle que $\|f - B_n\|_\infty \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ pour une constante $\delta > 0$.

Preuve :

(1) Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d de paramètre x. On note $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Ainsi, S_n suit une loi binomiale [2] et on a alors :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \overset{3}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x) \text{ et } \mathbb{E}[f(x)] = f(x) \text{ (constante, pas d'aléatoire)}$$

Heuristiquement, comme $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ [4], on aimerait que $B_n(x)$ soit "proche" de $f(x)$.
Mais on a, d'après précédemment :

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]. \tag{0.1}$$

f est continue sur $[0,1]$ compact donc uniformément continue par le théorème de Heine, donc $\omega(\delta)$ est défini pour tout $\delta > 0$ et $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. On a donc que si $\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leqslant \delta$, $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leqslant \omega(\delta)$.

1. Un module de continuité est une application croissante non nulle g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ tq $g(0) = 0$ et pour tout t, t' : $g(t + t') \leqslant g(t) + g(t')$.
2. Note pour la suite : comme elle est à support fini, elle admet des moments de tout ordre.
3. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable $S \subset F$, alors : $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] = \sum_{x \in S} \varphi(x) \mathbb{P}_X(\{x\})$.

C'est le théorème de transfert. Logiquement les hypothèses du théorème de transfert imposent que la fonction soit à valeurs réelles. Mais ça ne gène pas qu'elle soit complexe, au pire on fait Re+iIm. On n'a pas non plus de problème d'intégrabilité car on a un variable aléatoire discrète sur un espace fini.

4. C'est la LGN faible. Une Bernoulli a un moment d'ordre 2.

Par ailleurs, $\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty$ donc, pour $\delta>0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \omega(\delta)\underbrace{\mathbb{P}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\leqslant\delta\right)}_{\leqslant 1} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\delta\right).$$

Mais, par l'inégalité de Tchebychev[5], on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} = \frac{nx(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|f(x)-B_n(x)| \leqslant \omega(\delta)+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},$$

d'où

$$\limsup_{n\to+\infty}\|f-B_n\|_\infty \leqslant \omega(\delta).$$

Comme $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$, $\lim_{n\to+\infty}\|f-B_n\|_\infty=0$.

(2) Montrons déjà que $\omega(\lambda h)\leqslant(\lambda+1)\omega(h)$:
D'après le **Lemme** et par récurrence, on a $\omega(nh)\leqslant n\omega(h)$ pour $n\in\mathbb{N}$. De plus, ω est croissante donc, pour $\lambda\in\mathbb{R}, \omega(\lambda h)\leqslant\omega(\lceil\lambda\rceil h)\leqslant\lceil\lambda\rceil\omega(h)\leqslant(\lambda+1)\omega(h)$.
Ici, $\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)=\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\leqslant\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Déjà, par définition de ω,

$$\mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right].$$

On en déduit, avec (0.1) et[6]

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(x)| &\leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right] = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1\right)\\ &\leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2\right)\end{aligned}$$

par décroissance des $L^p(\mathbb{P})$ (ou inégalité de Hölder). Or

$$\begin{aligned}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(x-\frac{S_n}{n}\right)^2\right]\\ &= \underbrace{\operatorname{Var}\left(x-\frac{S_n}{n}\right)}_{\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)} + \left(\mathbb{E}\left[x-\frac{S_n}{n}\right]\right)^2\\ &= \frac{1}{n^2}nx(1-x)+\underbrace{\left(x-\frac{1}{n}nx\right)^2}_{0} = \frac{x(1-x)}{n}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(x)| &\leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1+\underbrace{\sqrt{x(1-x)}}_{\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}})\\ &\leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

D'où $\|f-B_n\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5. Soit X une v.a. d'espérance μ et de variance finie σ^2. On a, pour tout réel strictement positif t, $\mathbb{P}(|X-\mu|>t)\leqslant\frac{\sigma^2}{t^2}$

6. Si on se met dans $L^1(\mathbb{P})$ alors l'espérance c'est $\|\cdot\|_1$ etc. On peut appliquer ce qu'on connaît sur les L^p classiques, d'autant que ici la "mesure" est finie ($=1$).