264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et Applications

I- Variables aléatoires discrètes

1- Définitions

Déf 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, E un ensemble. Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable et $\forall x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

Rmq 2 : Si E est muni d'une tribu $\mathcal{E}$ contenant les points, alors toute variable aléatoire discrète est une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$

Déf 3 : Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ probabilisé. La loi de X est donnée par l'application $x \in E \mapsto \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}\{x\})$.

2- Lois discrètes usuelles

a) Loi uniforme

Déf 4 : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On note $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

Ex 5 : Lors d'un lancer de dé, le chiffre obtenu suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$

b) Loi de Bernoulli

Déf 6 : Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.
On note $X \sim b(p)$

Ex 7 : Lors du lancer d'une pièce équilibrée, la variable X vaut 1 si pile est obtenue, 0 sinon. $X \sim b(\frac{1}{2})$

c) Loi binomiale

Déf 8 : Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$ et $\forall k \in \{0,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
On note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Ex 9 : On répète l'exemple précédent n fois et X désigne le nombre de piles obtenus. $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

d) Loi géométrique

Déf 10 : Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On note $X \sim \mathcal{G}(p)$

Ex 11 : Si X désigne le rang du premier "Pile" lors de lancers d'une pièce équilibrée, alors $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

e) Loi de Poisson

Déf 12 : Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Ex 13 : Le nombre d'erreurs de fabrication dans une usine suit une $\mathcal{P}(\frac{1}{2})$.

f) Loi hypergéométrique

Déf 14 : Une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres $0 \leq M \leq n \leq N$ si $X(\Omega) = \{0,\dots,M\}$ et $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
On note $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$

Ex 15 : Le nombre de boules noires tirées lors d'un tirage sans remise de n boules dans une urne en contenant N, dont M noires, suit cette loi.

3- Conditionnement

Déf 16 : Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on définit pour $A \in \mathcal{F}$, la probabilité de A sachant B par $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Déf 17 : Un système complet est une famille $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ d'événements incompatibles telle que $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = 1$ où I est dénombrable.

Ex 18 : Si $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$, alors $\{X = x_i\}_{i \in I}$ est un système complet.

Prop 19 : Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet et $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$, alors :
$\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)$

Prop 20 : (Formule de BAYES) Sous les mêmes hypothèses, si $\mathbb{P}(A) > 0$,
$\mathbb{P}(A_i | A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$

Ex 21 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(Y | X = n) = \mathcal{B}(n,p)$, alors $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

II. Moments d'une variable aléatoire discrète et indépendance

1. Espérance et moments d'ordre supérieur

Déf 22 : Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Si $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| \mathbb{P}(X=x) < \infty$, alors on définit l'espérance de X par $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X=x)$

Ex 23 : Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, alors X n'admet pas d'espérance.

Prop 24 : (Théorème de transfert)
Soient $X : \Omega \to E$ variable aléatoire discrète, $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable.
Si $\sum_{x \in E} |f(x)| \mathbb{P}(X=x) < \infty$, alors $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) \mathbb{P}(X=x)$

App 25 : Théorème de Weierstrass
Si $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\left(B_n : x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, alors (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Déf 26 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si X variable aléatoire discrète vérifie $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, alors on appelle moment d'ordre p de X la quantité $\mathbb{E}(X^p)$

Déf 27 : Si X admet un moment d'ordre 2, on définit sa variance par $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

Prop 28 : (König-Huyghens) Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Rmq 29 : L'espérance s'interprète comme la moyenne de la variable. La variance mesure la distance entre la variable et son espérance.

Ex 30 : Le tableau ci-dessous donne espérance et variance des lois usuelles.

Loi de X	$\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{H}(N,M,n)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{n+1}{2}$	np	$\frac{1}{p}$	λ	$\frac{nM}{N}$
$\mathrm{Var}(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ	$\frac{N-n}{N-1} \frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$

2. Fonction génératrice des moments

Déf 31 : Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La fonction $G_X : s \mapsto \mathbb{E}(s^X)$ est appelée fonction génératrice de X.

Prop 32 :
* $\forall s \in [-1,1]$, $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$
* G_X est continue sur $[-1,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
* G_X caractérise la loi de X. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(X=n)$

Ex 33 : Soit $s \in [-1,1]$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(s) = (ps + 1 - p)^n$
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(s) = \exp(\lambda(s-1))$
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$

Prop 34 : X admet un moment d'ordre $p \Leftrightarrow G_X^{(p)}(1^-)$ existe
Dans ce cas, $G_X^{(p)}(1^-) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-p+1))$

3. Indépendance et somme de variables aléatoires discrètes

Déf 35 : Les variables discrètes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes si $\forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $\forall (x_{n_1}, \dots, x_{n_k}) \in X_{n_1}(\Omega) \times \dots \times X_{n_k}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_{n_i} = x_{n_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n_i} = x_{n_i})$

Ex 36 : Pour un lancer de dé, si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,2,4,5\}$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, mais $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Prop 37 : Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Lem 38 : (Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et (A_n) indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$

Ex 39 : Si $k \in \mathbb{N}$, $A \in \{0,1\}^k$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim b(p)$ indépendants, alors A apparaît presque sûrement une infinité de fois dans la suite (X_n).

Prop 40 : Soient X_1, X_2 variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ avec E stable par addition

La variable aléatoire X_1+X_2 est discrète et

$$\forall x\in E,\ \mathbb{P}(X_1+X_2=x)=\sum_{x_1\in E}\mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x-x_1)$$

Ex 41. La somme de n Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Prop 42 : Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\forall s\in[-1,1]$, $G_{X+Y}(s)=G_X(s)G_Y(s)$.

Ex 43 : Si $X\sim\mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y\sim\mathcal{P}(\lambda_2)$ indépendantes, alors $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Si $X\sim\mathcal{B}(n_1,p)$, $Y\sim\mathcal{B}(n_2,p)$ indépendantes, alors $X+Y\sim\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.

Il n'est pas possible de truquer deux dés pour que leur somme suive la loi uniforme $\mathcal{U}(\{2,\dots,12\})$

App 44 : Etude du processus de branchement de Galton-Watson.
Soit X intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ iid de loi $\mathbb{P}_X$.
Posons $Z_0=1$, $Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n}X_{i,n}$. DEV 1
On propose d'étudier la probabilité d'extinction $p_{ext}=\mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N}, Z_n=0)$

III - Comportements asymptotiques.

1. Approximation de lois

Déf 45. On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X_n))\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{E}(f(X))$. On note $X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}X$

Prop 46 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors :
$X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}X \iff \forall r\in\mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X_n=r)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=r)$

Thm 47 : Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\sim\mathcal{B}(n,p_n)$ avec $np_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda>0$.
La suite (X_n) converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$

Rmq 48 : La loi de Poisson modélise des évènements rares.

Prop 49 : Soit pour $j\in\mathbb{N}$, $X_j\sim\mathcal{H}(N_j,M_j,n)$ avec $\frac{M_j}{N_j}\xrightarrow[j\to+\infty]{}p$.
La suite (X_j) converge en loi vers $\mathcal{B}(n,p)$.

Prop 50 : $X=\sum_{k\geq1}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\sim\mathcal{U}[0,1]$ avec $\varepsilon_k\in\{0,1\}\iff$ les ε_k sont iid de loi $\mathcal{b}(1/2)$

DEV 2

2. Loi des grands nombres - Théorème limite central.

Déf 51 : Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilités vers X si $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)=0$. On note $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$

Thm 52 : (Loi faible des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant un moment d'ordre deux. Si $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_j)\to m$ et $\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}V(X_j)\to0$ alors, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{\mathbb{P}}m$.

Cor 53 : Si les (A_i) sont indépendants de probabilité p, alors $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{A_j}\xrightarrow{\mathbb{P}}p$.

Thm 54 : (Théorème limite central)
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre deux, alors $\frac{1}{\sqrt{n\,Var(X_1)}}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j-nm\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}Z$ où $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Ex 55 : Pour une loi de Poisson de paramètre 1, $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}$

Ex 56 : Pour estimer une proportion p lors d'un sondage, on travaille avec des intervalles de confiance. Ainsi, si $\hat{p}_n$ est obtenu lors du sondage, on sait avec probabilité 0,95 que $p\in[\hat{p}_n-\frac{1}{\sqrt{n}},\hat{p}_n+\frac{1}{\sqrt{n}}]$

3. Chaînes de Markov

Déf 57 : Une chaîne de Markov est une suite (X_n) à valeurs dans E telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x_1,\dots,x_{n+1}\in E$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0,\dots,X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n)$.
La chaîne est homogène si $Q(i,j)=\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)$ ne dépend pas de n.

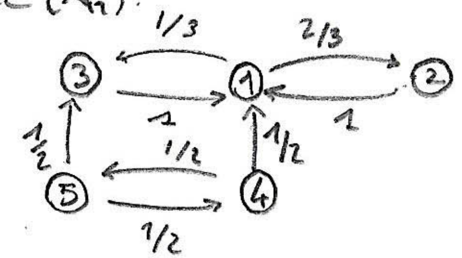
Prop 58 : La loi de la chaîne est donnée par la loi initiale et $Q=(Q(i,j))_{i,j\in E}$

Déf 59 : La probabilité π sur E est invariante si $\forall j\in E$, $\pi(j)=\sum_{i\in E}\pi(i)Q(i,j)$

Ex 60 : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est une chaîne de Markov.
* Exemple en annexe.

La chaîne de Markov associée à la matrice de transition suivante est notée (X_n).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$



4 et 5 sont transitoires ($5 \to 3 \not\to 5$ et $4 \to 1 \not\to 4$)

On résout $(a,b,c,d,e) = (a,b,c,d,e)P$ et on obtient, si $a+b+c+d+e = 1$, $(a,b,c,d,e) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0\right)$.

C'est la probabilité invariante associée à la chaîne.

Autrement dit, si $X_0 \sim \nu$ (i.e. $\mathbb{P}(X_0 = y) = \nu(y), \forall y \in E$), alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \nu$.

Références :

[OUV1] Probabilités 1, Jean-Yves Ouvrard

[OUV2] Probabilités 2, Jean-Yves Ouvrard

[MEL] Introduction à la théorie et au calcul des probabilités, Sylvie Méléard

[COT] Exercices de probabilités, Cottrell ...

[BAR] Probabilité, P. Barbe - M. Ledoux.