264

Variables aléatoires discrètes. Exemples et Applications

I Variables aléatoires discrètes.

I.1 Définition abstraite:

[Ouv1] p.20

def 1: Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète (notée VAD) si:

. $X(\Omega)$ est dénombrable . $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Si X est à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ espace probabilisé alors on appelle loi de probabilité de la VA X l'application:

$$P_X : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to [0,1] \\ A \mapsto P(X^{-1}(A)) \end{array}$$

Rem 2: La loi d'une VAD X est déterminée par le germe de probabilité $x \mapsto P(X=x)$ sur $(E, \mathcal{E})$ car $\forall A \in \mathcal{E}$

$$P(X^{-1}(A)) = \sum_{x \in A} P(X=x)$$

ex 3 La probabilité qu'en jetant 6 dés équilibré et discernables toutes les faces exhibent un chiffre différent est $\frac{6!}{6^6}$

I.2 Lois usuelles:

def 4: La loi uniforme sur un ensemble fini Ω est la probabilité qui attribue la même valeur à chaque événement élémentaire $\{\omega\}$.

$\forall A \in \mathcal{P}(A)$ $\quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Rem 5: Il est impossible de définir par le même procédé une loi uniforme sur un ensemble qui n'est pas fini.

ex 6: La probabilité d'obtenir k fois le chiffre 6 parmi n lancés de dés équilibrés, peut être modélisée en munissant l'espace $(\Omega, \{1,2,3,4,5,6\})$ de la probabilité uniforme P.
La probabilité cherchée est de $\binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n}$.

[Cand] p.17

def 7: Soit $p \in]0,1[$. La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de la VAD qui prend 1 pour les "succès" et 0 pour les "échecs" $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$. Elle est notée $\mathcal{B}er(p)$.

ex 8: Le jet d'une pièce équilibrée se modélise par une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. [NR]

def 9: Soit $\Omega = \{0,1,\dots,n\}$ et $p \in]0,1[$. La loi binomiale de paramètres n et p est loi de VAD X définie sur Ω tq: [Ouv1] p.17
$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Rem 10: (1) La loi $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi du nombre X de "succès" obtenus lors de n répétitions modélisé par une loi $\mathcal{B}er(p)$ "
(2) On peut retrouver le résultat de l'exemple 6 en modélisant par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/6)$.

def 11: Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La loi de Poisson de paramètre λ est la loi de la VAD X définie sur Ω tq: "
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$

Rem 12: C'est la loi d'une VA décrivant l'apparition d'événements rares nombre d'accidents, erreurs de fabrication... [NR]

def 13: Soit $\Omega = \mathbb{N}$ (resp $\mathbb{N}^*$) et $p \in]0,1[$. La loi de paramètre p sur $\mathbb{N}$ (resp $\mathbb{N}^*$) est la loi de VAD X définie sur Ω tq: $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X=n) = p(1-p)^n$ (resp $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$). Elle est notée $\mathcal{G}(p)$. [Ouv1] p.17

ex 14: Elle décrit le nombre d'échecs avant un premier succès. [NR]

def 15: Soit $\Omega = \{0,1,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tq $n \leq N(1-p)$. La loi hypergéométrique de paramètres n, p et N est la loi de VAD X définie sur Ω tq: [Ouv1] p.17
$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{k}}{\binom{N}{n}}$ on la note $\mathcal{H}(n,p,N)$

Rem 16: Soit une urne à N boules dont M sont marquées d'où $p = \frac{M}{N}$ la proportion de boules marquées. La loi binomiale donne la proportion que lors de n tirages avec remise on obtienne k boules marquées. La loi hypergéométrique donne cette même probabilité pour un tirage sans remise. [Cand] p.83

I3 Espérance et variance :

[Ouv1] p.115 def 17 : Soit X une VAD (réelle) dans $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ tq : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n| P(X=x_n) < +\infty$. On appelle espérance de X la quantité $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \mathbb{P}(X=x_n)$

p.243 ex 18 : Espérance des lois :

- uniforme sur $[\![x_1, x_n]\!]$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\mathcal{B}er(p)$: p
- $\mathcal{B}(n,p)$: np
- $\mathcal{P}(\lambda)$: λ
- $\mathcal{G}(p)$: $\frac{1-p}{p}$ si $\mathbb{N}$, $\frac{1}{p}$ si $\mathbb{N}^*$
- $\mathcal{H}(n,p,N)$: np

[NR] contrex 19 : X suit une loi $\frac{\pi^2}{6}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\delta_k}{k^2}$ mais n'admet pas d'espérance. ?

[Ouv1] p.122 thm 20 : (Transfert) : Soit $X : \Omega \to E$ une VAD et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. Alors :
(1) $Y = f\circ X$ est une VAD réelles
(2) Y admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{x\in E} |f(x)| \mathbb{P}(X=x) < +\infty$

Dans ce cas $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in E} f(x)\mathbb{P}(X=x)$

" def 21 : Soit $p \geq 1$ et X une VAD réelle à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ tq $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p P(X=x_n) < +\infty$. On appelle moment d'ordre p $\mathbb{E}(X^p) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^p P(X=x_n)$.

" def 22 : Soit X une VAD réelle admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X : $Var(X) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^2$.

" Rem 23 : (1) Par le thm de transfert, $Var(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X=x_n)$
(2) $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

p.243 ex 24 : Variance des lois :

- uniforme : $\frac{n^2-1}{12}$
- $\mathcal{B}er(p)$: $p(1-p)$
- $\mathcal{B}(n,p)$: $np(1-p)$
- $\mathcal{G}(p)$: $\frac{1-p}{p^2}$
- $\mathcal{P}(\lambda)$: λ
- $\mathcal{H}(n,p,N)$: $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

prop 25 : (Inégalité de Markov) Soit X une VAD admettant une espérance. $\forall \varepsilon > 0$: $P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$ p.133

prop 26 : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une VAD réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$ "

thm 27 : (Inégalité de Hoeffding) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VA réelles tq $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et indépendantes (voir partie II). Si il existe une suite de réelles strictements positifs tels que : $|X_n| \leq c_n$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$ [Ouv2] p. dév 1

appli 28 : Soit $X_1, \dots, X_n$, n lois $\mathcal{B}er(p)$. Soit $\alpha \in]0,1[$ avec $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$, on a : $\left[\frac{1}{n}S_n - \varepsilon ; \frac{1}{n}S_n + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$. [Ber] p.

II Variables aléatoires discrètes et indépendantes et fonctions génératrices :

II 1 Indépendance et somme de variables aléatoires indépendantes :

def / prop 29 : Soit $(X_i)_{i=1}^{n}$ une famille de VAD. Alors les (X_i) sont indépendants ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X(\Omega)$ [Ouv 1] p.57

$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$

ex 30 : (1) si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ [Cand] p.168
(2) si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$
(3) si $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$ et $X_2 \sim \mathcal{G}(q)$ alors $\min(X_1, X_2) \sim \mathcal{G}(pq - p - q)$.

II2 Fonction génératrice :

déf 31 : Soit X une VAD à valeurs dans $\mathbb{N}$, $s \in [-1,1]$. La fonction génératrice de X est :
$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ définie sur $[-1;1]$

prop 32 : (1) $\forall s \in [-1,1]$, $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) s^n$

(2) G_X caractérise la loi de P_X : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

ex 33 Fonctions génératrices usuelles :

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$: $G_X(s) = (ps+(1-p))^n$ • $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$
- $X \sim \mathcal{G}(p)$: $G_X(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$ si $\mathbb{N}$, $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$ si $\mathbb{N}^*$

prop 34 : Soient X et Y deux VAD indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\forall s \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s) \times G_Y(s)$

prop 35 : Soit X une VAD à valeur dans $\mathbb{N}$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment $r \iff G_X$ est r fois dérivable à gauche en 1.

thm 36 : (Processus de Galton Watson) : Soit X une VAD intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $p_k = P(X=k)$ et $m = \mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k < \infty$
De plus soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de VA suivant la loi P_X et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$
On pose $\pi_n = P(Z_n = 0)$ et $P_{ext} = P(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$
Alors (1) Si $m > 1$, alors P_{ext} est l'unique point fixe de $G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ sur $]0,1[$.
(2) Si $m \leq 1$, alors $P_{ext} = 1$.

III Théorèmes limites et approximations :

III1 Approximation de la loi de Poisson :

thm 37 (de Poisson). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ tq $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$

ie $P(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

rem 38 : Pour p "assez petit", on peut approcher $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{P}(np)$. "

ex 39 : Le nombre de personnes nées le 1er janvier suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{365})$ que l'on peut approcher par $\mathcal{P}(\frac{n}{365})$. "

III2 Loi des grands nombres et théorème central limite :

thm 40 : (Loi des grands nombres) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VA indépendantes, admettant un moment d'ordre 2, tq $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ et $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} Var(X_j) < +\infty$ [Ouv2] p108
Alors : $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[ps]{} m$ et $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[\mathbb{L}^2]{} m$

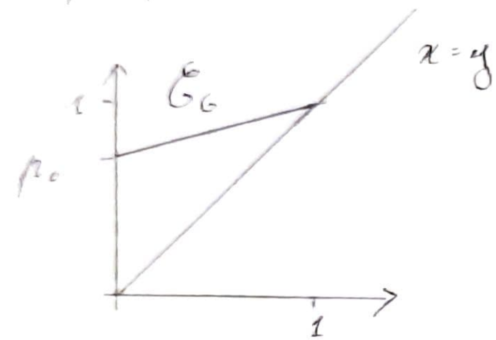
ex 41 : On lance un dé $X_n = 1$ si le n ième lancer vaut 1, 0 sinon. Alors $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \to \frac{1}{6}$ presque surement et dans $\mathbb{L}^2$. "

thm 42 : (Moivre Laplace) : Si $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que "

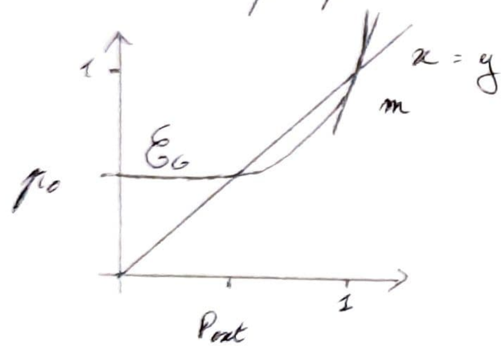
$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Réf : [Ouv1] Probabilités 1 - Ouvrard
[Cand] Théorie des probabilités - Candelpergher
[NR] No ref "
[Ouv2] Probabilités 2 - Ouvrard
[Ect] Exercices de probabilités - Cottrel

① Si $p_0 + p_1 = 1$



② Si $m > 1$ et $p_0 + p_1 < 1$



③ Si $m \leq 1$ et $p_0 + p_1 < 1$