265

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

[CAND] et [ROU]

I - Fonctions usuelles et variable complexe

① Fonctions entières usuelles

Def - Théorème 1 : pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, où le Rayon de convergence de la série est $+\infty$.

Théorème 2 : $\times$ $z \longmapsto \exp(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}$

- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{d\exp(z)}{dz} = \exp(z)$
- pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

Application 3 : écriture d'un nombre complexe sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$

Corollaire 4 : La restriction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est le seul morphisme continu non nul de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (à automorphisme de $\mathbb{R}$ près).

Appli 5 : Loi sans mémoire : Une variable aléatoire à densité sans mémoire suit nécessairement une loi exponentielle

Appli 6 : Transformée de Fourier : $\times$ Si X est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique

$$\varphi_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathbb{E}(e^{itX}) \end{array}$$ caractérise sa loi.

- φ caractérise l'indépendance entre plusieurs variables : X et Y indépendantes ssi $\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_X(t_2)$
- Si X admet un moment d'ordre n, alors $\mathbb{E}[X^n] = (-i)^n \varphi_X^{(n)}(0)$

Def 7 : Pour $z \in \mathbb{C}$, . $\cos(z) = \mathrm{Re}(e^z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

. $\sin(z) = \mathrm{Im}(e^z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Proposition 8 : cos et sin sont analytiques sur $\mathbb{C}$ et non bornées sur $\mathbb{C}$.

Application 9 : cos et sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forment une base de solutions de l'équation $f'' + f = 0$.

[CAND]

② Inversion de l'exponentielle complexe

Def 10 : $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini comme la réciproque de $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

Rq 11 : On peut aussi le définir comme la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ nulle en 1.

Théorème 12 - inversion de exp en complexe : (cf annexe)
Soit d_α une demi-droite d'origine 0 et d'argument α.
La fonction $\exp : \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus d_\alpha$, $z \longmapsto e^z$

est bijective et possède un inverse analytique sur $\mathbb{C}\setminus d_\alpha$ défini par $\log(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi} d\xi + C_0$

où $z_0 \in \mathbb{C}\setminus d_{\alpha+\pi}$, et $\exp(C_0) = z_0$, $\alpha < \mathrm{Im}(C_0) < \alpha + 2\pi$
$\mathbb{C}\setminus d_\alpha$ étoilé par rapport à z_0

Appli 13 : Définition des fonctions puissance $z \longmapsto z^\alpha$ sur $\mathbb{C}\setminus d_\alpha$

③ Théorie de l'indice

Def 14 : L'indice d'un point $a \in \mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ vaut $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$

Prop 15 : $\mathrm{Ind}(\gamma,\cdot) : \mathbb{C}\setminus_{\gamma([0,1])} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bien définie et continue.

Appli 16 : Obstruction à un prolongement analytique du log sur $\mathbb{C}$ avec $\oint_{S^1} \frac{dz}{z}$

Théorème 17 : Résidus : Soit f méromorphe d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et P l'ensemble de ses pôles.
Alors pour tout lacet γ, $\oint_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in P} \mathrm{Ind}(\gamma, a)\mathrm{Res}(f,a)$

Appli 18 : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ et $\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

II – Fonction Γ et applications

① Définition et prolongement

Def 19 : Pour $Re(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

[LES] **Prop 20** : Γ est holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$

Prop 21 : $\forall z \in \{Re(z)>0\}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Appli 22 : $\forall n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

[Rouv] p 349 **Prop 23** : pour $t\in\mathbb{R}$, $\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}$

Appli 24 : Equivalent de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

Appli 25 : Si $X_n \sim B(n, p_n)$, avec $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$
Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $P(p)$

Théorème 26 : Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont
- les pôles sont les entiers négatifs
- les résidus valent $\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}$

② Transformée de Laplace

Def 27 : Pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable, $\sigma_0 = \inf\{\sigma\in\mathbb{R} / f(x)e^{-\sigma x}$ intégrable$\}$ [LES]
Alors pour $z\in\mathbb{C}$ tq $Re(z) > \sigma_0$, on pose
$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}dx$$

Prop 28 : $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe sur $\{Re(z) > \sigma_0\}$

Prop 29 : $\mathcal{L} : \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable$\} \longrightarrow \mathcal{H}(Re(z) > \sigma_0)$
$f \longmapsto \mathcal{L}(f)$
est linéaire et injective sur $]\sigma_0 ; +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\sigma_0 ; +\infty[$.

Appli 30 : Autre méthode de calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$

Rq 31 : $\mathcal{L}(x\longmapsto x^n)(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z^{n+1}}$

Rq 32 (culturelle) : $\mathbb{R}_+^*$ est un groupe localement compact et $\frac{dt}{t}$ est une mesure de Haar pour ce dernier.
Γ est alors la transformée de Laplace de $t\longmapsto t^x$ par rapport à cette mesure, évaluée en $z=1$.
Γ est également la transformée de Mellin de $t\mapsto e^{-t}$.

Théorème 33 : si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}$ pour tout $x\geq 0$
Alors $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$.

Corollaire 34 : Th. de la valeur initiale et de la valeur finale : Soit f ayant une transformée de Laplace et des limites en 0 et en $+\infty$.
Alors $\lim_{p\to\infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0^+)$ et $\lim_{p\to 0} p\mathcal{L}(f)(p) = f(+\infty)$

Appli 35 : Résolution d'EDO
$t\longmapsto (t+1)\sin t$ est l'unique solution de $\begin{cases} y'' + y = 2\cos \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\end{cases}$

3 Relations fonctionnelles

Théorème 36 : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$

DEV 1

Proposition 37 - Définition par Weierstrass

[CON] pour $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n}) e^{-z/n}$

Appli 37 bis : $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ donne $\pi = \prod_{n \geq 1} \left(\dfrac{4n^2}{4n^2-1} \right)$

Appli 38 : × Loi Gamma (k, θ) de densité

$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k}$$

× La somme de n v.a., suivant une loi exponentielle de paramètre θ, indépendantes, suit une loi gamma(n, θ).

× Loi du $\chi^2(n)$: loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Tests d'adéquation à une loi en statistiques.

III - Fonction ζ de Riemann et nombres premiers

1 Définition et propriétés

[KARA] **Def 39** : Pour $Re(s) > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Théorème 40 : ζ est holomorphe sur $Re(s) > 1$.

Appli 41 : Soit χ un caractère de Dirichlet.
$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$ est définie et holomorphe sur $\{Re(s) > 1\}$

Théorème 42 : × ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en 1 de résidu 1.

× De plus, pour $n \leq 0$, $\zeta(2n) = 0$ (zéros triviaux de ζ)

DEV 2

Corollaire 43 : Equation fonctionnelle de ζ. Pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}$$

Rq 44 : Conjecture de Riemann : les zéros non triviaux de ζ ont tout $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

2 Nombres premiers

Théorème 45 - Produit d'Euler $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \dfrac{1}{1-p^{-s}}$ pour $Re(s) > 1$

Application 46 : pour $s > 1$, $\sum_p \frac{1}{p^s} \underset{s \to 1^+}{\sim} \ln \frac{1}{s-1}$ [Serre]

Proposition 47 : Pour $Re(s) > 2$, $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^s}$

Proposition 48 : Pour $Re(s) > 1$, $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$

Appli 49 : Inversion de Möbius. Si F et f des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, Alors

$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ssi

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 50 : $\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rq culturelle 51 : Progression arithmétique de Dirichlet

Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux
Il existe une infinité de nb premiers p tq $p \equiv a [n]$

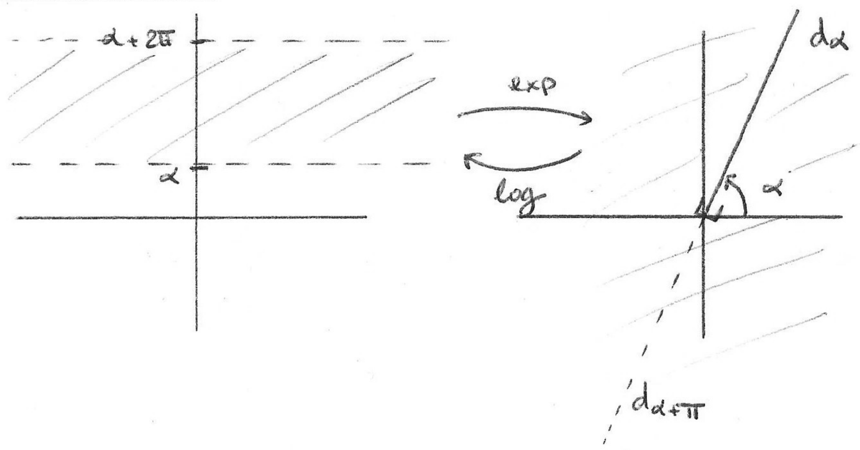
Rq culturelle 52. Théorème des nombres premiers

$\pi(x)$: nb premiers entre 2 et x

$$\pi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

Annexe

Théorème 12



Références

[Kara] : Karatsuba - The Riemann Zeta function

[Con] : Conway - Function of one complex variable

[Les] : Lesfari - Variables Complexes

[Serre] : Cours d'arithmétique

[Rouv] : Rouvière - Petit guide de calcul diff

[Cand] : Candelpergher - Fonctions d'une variable complexe

[Rud] : Rudin - Analyse réelle et complexe (Prologue)

DEV 1 : Bernis, 40 dev d'Analyse pour l'agrégation

DEV 2 : Conway