265

Exemple d'étude et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

I - Fonctions usuelles

1 - Fonction exponentielle

Def 1: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Rq 2: Cette série est absolument convergente

Prop 3: $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est égale à sa dérivée: $\exp' = \exp$

Coro 4: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Ex 5: $\lim_{x \to +\infty} x\left[e^{\frac{1}{x}} - 1\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$

Prop 6: $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $e^{x+y} = e^x e^y$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Prop 7: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante.

2 - Fonction logarithme

Def 8: Logarithme népérien: $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$

Prop 9: $\forall x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(1+x) \leq x$ et $\ln(1) = 0$

Prop 10: $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de réciproque $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Coro 11: $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Prop 12: $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Prop 14: $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Coro 15: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Ex 16: $\lim_{x \to +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = 1$

Def 17: On définit le logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$ par:
$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Ex 18: Logarithme décimal: $\forall x > 0$, $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Def 19: On définit la fonction exponentielle de base $a > 0$ par: $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto e^{x\ln(a)}$

Rq 19-bis: C'est une réciproque de $\log_a$

Appli 20: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 - Fonction trigonométriques et réciproques

Def 21: On définit les fonctions cosinus, sinus et tangente de la manière suivante:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Prop 22: (Propriétés d'addition de sin, cos, tan et parité)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(ii) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$

(iii) Si $x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

(iv) cos est paire, sin est impaire, tan est impaire (sur leur domaine de définition)

Prop 23:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(ii) sin, cos et tan sont dérivables sur leurs domaines de définition

(iii) $\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$; $\tan' = 1 + \tan^2$

Prop 23-bis: $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$

Def 23-ter: On définit la fonction sinus cardinal par:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Def 24: On définit les fonctions trigonométriques réciproques Arcsin, Arccos et Arctan de cette manière

$\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \longmapsto \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^{-1}(x)$

$\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \longmapsto \cos|_{[0,\pi]}^{-1}(x)$

$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \longmapsto \tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}^{-1}(x)$

Prop 25 : Arcsin, Arccos et Arctan sont dérivables respectivement sur $]-1,1[$, $]-1,1[$ et $\mathbb{R}$, et leurs dérivées sont données par :

(i) - $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) - $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Prop 26 : Arctan est impaire et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \pm \dfrac{\pi}{2}$

4- Fonctions puissances

Def 27 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance α par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \end{aligned}$$

Prop 28 : (Propriétés fonctionnelles des fonctions puissances)

Soient $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) - $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

(ii) - $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

(iii) - $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$

(iv) - La fonction $\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$

Rq 29 : Quand $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge par continuité en 0 (en y attribuant la valeur 0). Quand $\alpha \in \mathbb{Z}$, on peut prolonger cette fonction à $\mathbb{R}^*$ et même à $\mathbb{R}$ quand $\alpha \in \mathbb{N}$

II - Comparaison et séries entières

1 - Résultats de croissance comparée

Prop 30 : Soient $\alpha, \beta > 0$, $a > 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

(i) - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ (Logarithme - polynomial inverse)

(ii) - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\beta} = +\infty$ (Exponentiel - polynomial inverse)

(iii) - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$ (Logarithme - polynomial)

(iv) - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x |x|^\gamma = 0$ (Exponentiel - Polynomial)

Ex 31 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(1+\ln(x))}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

2- Développements en série entière

Prop 32 : (Développements en série entière de fonctions usuelles)

(i) - $\forall x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \prod\limits_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

(iii) - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iv) - $\forall x \in]-1,1[$ $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

(v) - $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$

(vi) - $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

(vii) - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$

Ex 33 : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n 2^n}$ donc $\ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n 2^n}$

III - Fonctions spéciales

1- Fonction ζ de Riemann

Def 34 : Soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 1$. On définit $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^z}$

Prop 35 : (Holomorphie de ζ)

ζ est holomorphe sur le domaine $\{\operatorname{Re}(z) > 1\}$ et sa dérivée k-ième est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \{\operatorname{Re}(z) > 1\}, \quad \zeta^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^z}$$

Prop 36 : ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ avec un pôle en $z = 1$

2. Fonction Γ d'Euler

Def 37 : Soit $z \in \mathbb{C}$: $Re(z) > 0$. On définit $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Prop 38 : Γ est holomorphe sur le domaine $\{Re(z) > 0\}$ et sa dérivée k-ième vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \{Re(z) > 0\}, \quad \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt$$

Prop 39 : Vue comme fonction réelle sur $]0, +\infty[$, Γ est logarithmiquement convexe et est strictement croissante sur $[2, +\infty[$

Prop 40 : $\forall z \in \{Re(z) > 0\}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Coro 41 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

Prop 42 : Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles en tout entier naturel négatif. De plus, on a la formule suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}, \ \forall n \in \mathbb{N} ; \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

Th 43 : (Formule de Stirling)

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

DVPT 1

3. Transformée de Laplace

Def 44 : Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. On définit sa transformée de Laplace par :

$$\forall s > 0, \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Ex 44-bis : Si $f(t) = 1$, $\forall s > 0$, $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}$

Prop 45 : Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*)$, alors on a :

(i) $\forall s > 0$, $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$

(ii) $\mathcal{L}\{f\}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall s > 0$,

$$\mathcal{L}\{f\}'(s) = -\int_0^{+\infty} t e^{-st} f(t) dt$$

Rq 46 : On peut seulement supposer $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ mesurable dans le point (ii).

Th 47 : (Intégrale de Dirichlet)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et on peut même calculer sa limite : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

DVPT 2

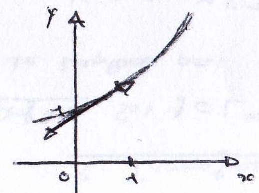
Rq 48 : C'est un exemple d'intégrale semi-convergente.

Références

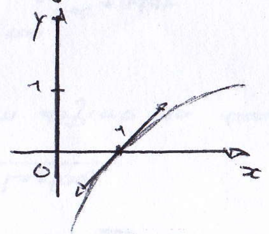
- Joël L. Schiff, The Laplace Transform, Theory and applications
- Alain Yger, Analyse complexe

Annexe : Graphes de fonctions

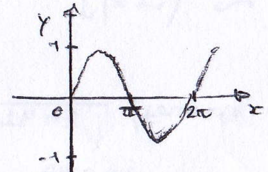
Exponentielle



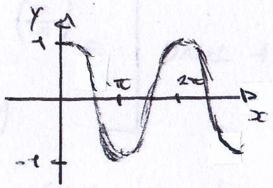
Logarithme népérien



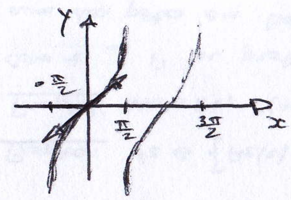
Sinus



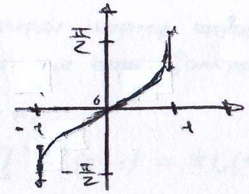
Cosinus



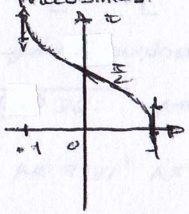
Tangente



Arcsinus



Arccosinus



Arctangente