265

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

I - Fonctions usuelles

1) La fonction exponentielle

déf 1: la fonction exponentielle est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

prop 2: 1) $z \mapsto \exp(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

2) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

prop 3: la fonction exponentielle est un morphisme surjectif de groupes, de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Son noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$ et il est périodique de période principale $2i\pi$.

rq 4: la fonction exponentielle peut être aussi définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par la limite :
$$\exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$
cette définition conserve les propositions précédentes.

rq 5: la différence entre l'exponentielle réelle et l'exponentielle complexe est la non injectivité de cette dernière.

ex 6: pour X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$, on définit sa fonction caractéristique par : $\Phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mathbb{P}_X(x)$$

app 7: Equations différentielles linéaires.
la fonction $z \mapsto \exp(az)$, $a \in \mathbb{C}$, est solution de l'équation $y' - ay = 0$.

2) Application à la trigonométrie.

déf 8: on définit les fonctions cosinus et sinus complexes telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

prop 9: Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$

prop 10: 1) $z \mapsto \cos(z)$ et $z \mapsto \sin(z)$ sont 2π-périodiques sur $\mathbb{C}$

2) $z \mapsto \cos(z)$ est paire, $z \mapsto \sin(z)$ est impaire

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos'(z) = -\sin(z)$ et $\sin'(z) = \cos(z)$

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ et $\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2})$

prop 11: Formules d'Euler
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$
$$\text{et} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

app 12: Formules d'addition. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$\cos(z+z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$$
$$\cos(z-z') = \cos(z)\cos(z') + \sin(z)\sin(z')$$
$$\sin(z+z') = \cos(z)\sin(z') + \sin(z)\cos(z')$$
$$\sin(z-z') = \cos(z)\sin(z') - \sin(z)\cos(z')$$

prop 13: les fonctions cosinus et sinus sont analytiques sur $\mathbb{C}$ et non bornées sur $\mathbb{C}$.

déf 14: On définit les cosinus et sinus hyperboliques pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :
$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$
$$\text{et} \quad \sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$

prop 15 : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$\cosh(z) = \cos(iz)$ $\sinh(z) = -i\sin(iz)$

$\cos(z) = \cosh(iz)$ $\sin(z) = -i\sinh(iz)$

3) les logarithmes complexes.

déf 16 : une détermination du logarithme complexe est une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0, telle que $\forall t \in \Omega, \exp(f(t)) = t$.

prop 17 : s'il existe une détermination f du logarithme complexe dans l'ouvert connexe Ω, toute autre détermination est de la forme $f + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, $f + 2k\pi i$ est une détermination du logarithme complexe pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

déf 18 : on appelle détermination principale du logarithme l'application

$$\mathrm{Log} : \begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C} \\ re^{i\theta} \longmapsto \ln(r) + i\theta \end{array}$$

où $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $r := |z| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta := \arg(z) \in]-\pi, \pi[$

rq 19 : $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{Log}(z) = \ln(z)$

prop 20 : 1) $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$

2) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$

3) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $z = \exp(\mathrm{Log}(z))$

4) $z = \mathrm{Log}(\exp(z)) \iff \mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi[$.

5) $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-)^2$, si $zz' \notin \mathbb{R}_-$,

$\mathrm{Log}(zz') = (\mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z'))\ [2i\pi]$

th 21 : La somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ qui CV pour $|z|<1$ est égale à $\mathrm{Log}(1+z)$

II - Fonctions spéciales

1) Fonction Gamma d'Euler

déf 22 : pour $z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par : $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$

th 23 : Γ est holomorphe sur $D := \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

prop 24 : $\forall z \in D$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

app 25 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

th 26 : Prolongement de Gamma.
la fonction Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples aux entiers négatifs. De plus, les résidus valent : $\forall n \geq 1$, $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ — dev n°1.

prop 27 : Formule des compléments

$\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ — dev n°2

app 28 : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

prop 29 : Formule du produit d'Euler

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z}$

prop 30 : "définition de Weierstrass"

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$

où γ est la constante d'Euler

2) Fonction Bêta d'Euler

déf 31 : pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tq $\mathrm{Re}(x) > 0$ et $\mathrm{Re}(y) > 0$, on définit la fonction Bêta par : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

prop 32 : $\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2$, $Re(x)>0$ et $Re(y)>0$,

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}$$

prop 33 : la fonction β est holomorphe par rapport à chacune de ses variable sur D.

prop 34 : 1) $\forall z\in D$, $\beta(z,1) = \frac{1}{z}$

2) $\forall z\in\mathbb{C}$, $0<Re(z)<1$, $\beta(z,1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

3) $\forall z\in D$, $2^{2z-1}\beta(z,z) = \beta\left(\frac{1}{2},z\right)$

app 35 : Formule de duplication

$\forall z\in\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z)$

3) Fonction Zêta de Riemann

déf 36 : la fonction Zêta est définie pour tout $z\in\mathbb{C}$, $Re(z)>1$ par $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$

th 37 : la fonction ζ est holomorphe sur $D' := \{z\in\mathbb{C},\ Re(z)>1\}$

prop 38 : $\forall z\in D'$, $\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$

th 39 : Prolongement de ζ.

la fonction ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec un unique pôle simple en 1, de résidu 1.

Réf :

* Nikiforov & Ouvarov, Eléments de la théorie des fonctions spéciales
* Chabat, Introduction à l'analyse complexe
* Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques
* Rudin, Analyse réelle et complexe
* Quéffélec & Zuily, Analyse pour l'agrégation
* Ramis & Deschamps & Odoux, Cours de mathématiques