On se fixe $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I- Premières propriétés et définitions de l'indépendance

a) Indépendance d'évènements

Déf 1: Deux évènements A et B sont indépendants (indp) si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Ex 2: Lancers de 2 dés : un rouge, un bleu
$A = \{$obtenir nbre ≤ 4 dé rouge$\}$, $B = \{$obtenir 6 dé bleu$\}$.

Déf 3: Une famille quelconque d'évènements $(A_i) \in \mathcal{A}$ est mutuellement indépendante si $\forall J \subset I$ fini, $\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$

Rq 4: Lancers de dé : $A = \{$dé rouge impair$\}$, $B = \{$dé bleu impair$\}$ $C = \{$somme des dés impaire$\}$. A, B, C sont 2 à 2 indp mais ne sont pas mutuellement indp.

Ex 5: $A_n = \bigcup_{1 \leq k \leq 2^{n-1}} \left] \frac{2(k-1)}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} \right[$. (A_n) mut indp
sur $\Omega =$

b) Indépendance de tribus

Déf 6: $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$ sous tribus de $\mathcal{A}$ sont dites indp si $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1$, $\mathbb{P}(A_1 \cap B_1) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)$

Déf 7: Une famille qcq de sous tribus $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est mut indp si toute famille d'év^{ts} $A_i \in \mathcal{A}$ vérifie déf 3

Ex 8: $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$ pour $i = 1, 2$ 2 espaces proba. En identifiant $A_1 \in \mathcal{A}_1$ avec $A_1 \times \Omega_2$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$ avec $\Omega_1 \times A_2$ $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des sous-tribus de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et sont indp dans $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$

c) Indépendance de variables aléatoires

Déf 9: Une famille $(X_i)_{i \in I} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{B})$ de variables aléatoires (v.a) est mut indp si $\forall J \subset I$ fini, pour tout $j \in J$, $B_j \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(X_j \in B_j, j \in J) = \mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(\{X_j \in B_j\})$

Rq 10: $X = \mathbb{1}_{A_n}$. (X_n) famille de v.a indep

Ex 11: X et Y v.a. suivant une loi de Bernouille sur $\{-1, 1\}$. La famille (X, Y, XY) est formée de va 2 à 2 indep mais n'est pas mutuellement indep.

Prop 12: $(X_1, \dots, X_d)$ famille de v.a réelles indp. La loi $P^{(X_1, \dots X_d)} = P^{X_1} \otimes \dots \otimes P^{X_d}$ ie le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ est égale au produit des lois marginales

Rq 13: Réciproquement, si la loi du vecteur est égale au pdt des marginales, les v.a sont indep.

Cor 14: Une famille qcq de v.a.r X_i, $i \in I$ est indp ssi pour toute famille finie $J \subset I$, toute famille de f° boreliennes Φ_j, $j \in J$ tq $\Phi_j(X_j)$ soit intégrable $\mathbb{E}(\prod_{j \in J} \Phi_j(X_j)) = \prod_{j \in J} \mathbb{E}(\Phi_j(X_j))$

d) Variables aléatoires non corollés

Déf 15: X, Y v.a.r dans L^2. X et Y sont non corollées si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ autrement dit si $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = 0$

Rq 16: On dit que $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire de L^2.

Rq 17: D'après Cor 14, 2 va indep de carré intégrable sont non corélées

Ex 18: $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$. Alors X et Y sont non corélées.

Prop 19: $X_1, \dots, X_n$ 2 à 2 non corolées. Alors $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$. On en déduit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i))| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$, $t > 0$

II Caractérisation des lois dont les v.a sont indépendantes

a) Somme de v.a indépendantes

Prop 20: X, Y v.a.r indep. La loi de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $P^X * P^Y$ des lois P^X et P^Y tq pour toute fonction ϕ borélienne, $\int_{\mathbb{R}} \Phi(dP^X * dP^Y) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \Phi(x+y) \, dP^Y(y) \, dP^X(x)$

Déf 21: La fonction génératrice G_n est : $G_n(s) = \sum_{k \geq 1} s^k \mathbb{P}(X = k)$

Déf 22: La fonction caractéristique est tq $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i \langle t, X \rangle})$

Prop 23: Si X et Y sont indep alors $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, $\forall t$

Ex 24 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a indep identiquement distribuée tq $\mathbb{P}(X = e_i) = \mathbb{P}(X = -e_i) = \frac{1}{2d}$ ou (e_i) base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $d \geq 3$, $\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) = 1$

$\boxed{\text{dev 1}}$

b) Tableau des v.a à lois discrètes

Lois	Probabilités	Fonction caract'	Prop remarquables
$\mathcal{B}(p)$	$k \in \{0,1\}$ $\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$	$1 - p + pe^{it}$	$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(p) \sim \mathcal{B}(n,p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$(1-p+pe^{it})^n$	$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(n_i,p) \sim \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{m} n_i, p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda^k e^{-\lambda} \times 1/k! = \mathbb{P}(X=k)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\lambda_i) \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$
$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^k p = \mathbb{P}(X=k)$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$	$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{G}(p) \sim \mathcal{B}(n,p)$

Rq 25 : La loi hypergéométrique de proba : $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{r_1}{k}\binom{r-r_1}{n-k}}{\binom{r}{n}}$ ne possède pas de fonction caractéristique.

c) Tableau de v.a à lois continues

Lois	densité	Fonct° caract'	Prop remarquables
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$	$e^{itm - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$	$\sum \mathcal{N}(m_i,\sigma_i^2) \sim \mathcal{N}(\sum m_i, \sum \sigma_i^2)$
$\mathcal{E}(p)$	$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, p e^{-px}$	$\frac{1}{1-pit}$	$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{E}(p) \sim \mathcal{E}(mp)$
$\gamma(p,\theta)$	$\frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{(1-i\theta t)^p}$	$\sum_{i=1}^{m} \gamma(p_i,\lambda) \sim \gamma(\sum_{i=1}^{m} p_i, \lambda)$
Cauchy	$\frac{1}{\pi} \quad \frac{1}{1+x^2}$	$e^{-\lvert t \rvert}$	$\sum$ Cauchy $\sim$ Cauchy

d) Vecteurs aléatoires gaussiens

Déf 26 : $X = (X_1, .., X_d) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est dit gaussien si pour tout $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i$ est une v.a gaussienne

Déf 27 : La matrice de covariance de X est symétrique et définie positive tq $\Gamma = (\mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))))_{i,j \in [\![1,d]\!]}$.

Ex 28 : $G = (G_1, .. G_d)$ dont les G_i sont indep de lois $\mathcal{N}(0,1)$. Alors $G \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

Prop 29 : X vecteur gaussien centré (ie $\mathbb{E}(X) = 0$) de matrice de covariance $\Gamma = A^t A$ où A matrice carré. Alors X à la même loi que AG (ou G est dans l'ex 28)

Thm 30 : X vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$ de matrice de cov Γ. Si les composantes de X sont 2 à 2 non corrélées (ie Γ diagonale) alors la famille $(X_1, .., X_d)$ est mutuellement indépendante

III Applications de l'indépendance aux différentes convergences

a) Rappels des différentes définitions de convergences

Déf 31 : (i) (X_n) converge presque sûrement vers X (ps) si $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$.

(ii) (X_n) converge en proba vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

(iii) (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction ϕ boréliennne : $\lim_{n \to +\infty} \int \phi(X_n)\, dP = \int \phi(X)\, dP$

Prop 32 : (X_n) converge presque sûrement $\Rightarrow$ (X_n) converge en proba $\Rightarrow$ (X_n) converge en loi

b) Théorèmes fondamentaux

Déf 33 : (T_n) famille indp de tribus. On considère A_n la tribu engendrée par $T_n, T_{n+1}, \dots$. On pose $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ la tribu des évènements terminaux.

Thm 34 : [Loi du 0-1] Pour tout $A \in \mathcal{A}_\infty$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1

Ex 35 : (A_n) suite d'évts indp. Alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m$ $= \{A_n$ infiniment souvent (i.s)$\}$ est un événement terminal pour $T_n = \sigma(A_n)$.

Lemme 36 [Borel-Cantelli]. (A_n) une suite d'évènements

(i) si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s}) = 0$

(ii) (A_n) indp, si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s}) = 1$.

Ex 37 : [singe tapant à la machine] la proba qu'un singe tape correctement et d'un seul tenant Roméo et Juliette (soit 10^6 caractère) vaut 1.

c) Propriétés asymptotiques

On désigne $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoire réelles indépendante et de même loi qu'une v.a X.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Thm 38 : [Loi faible des grands nombres]

Si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ alors $\frac{S_n}{n}$ converge en proba vers X, $n \to +\infty$

Thm 39 : [Loi forte des grands nombres]

$\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ ssi $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X)$ ps

Thm 40 [Théorème central limite]

(i) si $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, alors $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable $\mathcal{N}(0, Var(X))$.

(ii) Si $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et la loi limite est normale centrée de variance $Var(X)$

Thm 41 : [Inégalité de Hoeffding]. (X_n) suite de v.a.r indp centrées tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, c_n > 0$ tq $|X_n| < c_n$ ps. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

Dev 2