267 Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Soit $I =]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

I - Comprendre et représenter une courbe

I-1 Courbes paramétrées

Déf 1 Une courbe est une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ différentiable.

Déf 2 La longueur de $\gamma(I)$ est $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.

Ex 3 • le cercle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

la longueur de $\gamma([0,2\pi])$ est 2π

• la parabole $\gamma(t) = (t, t^2)$

La longueur de $\gamma(]-1,1[)$ est $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

Déf 4 La courbure d'une courbe en un point est $1/R$, où R = rayon du cercle osculateur

Ex 5 Pour (t, t^2), la courbure en $(0,0)$ est 2.

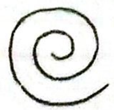
I-2 Paramétrisation polaire

Déf 6 En dimension $n=2$, au lieu de paramétrer γ par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on peut la paramétrer $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ où : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

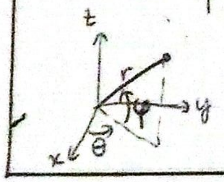
Ex 7 • Le cercle se paramétrise en polaire :

$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = t \end{cases}$ (cercle de rayon R)

• Spirale d'Archimède : $r(t) = \theta(t) = t$.



Déf 7 En dimension $n=3$, on a une paramétrisation en sphérique : $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$



I-3 Forme implicite ($n=2$)

Déf 8 Une courbe peut être donnée par une équation $f(x,y) = 0$, où f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 9 Le cercle unité : $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ex 10 Les courbes elliptiques considèrent certains points d'une courbe, et ont des applications en cryptographie.

Rem 11 • (paramétrée $\to$ implicite)

Le résultant fournit une équation implicite d'une courbe rationnelle, par élimination.

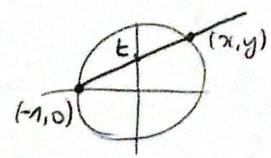
• (implicite $\to$ paramétrée)

En théorie : le Thm des Fonctions Implicites donne localement la solution si $df \neq 0$ en un point.

En pratique : Projeter une courbe connue sur la courbe étudiée.

Ex 12 Le cercle

$(x,y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$



II - Utilisation en équations différentielles

II-1 Mise en équation

Quand $\gamma(t)$ définit le mouvement d'un objet, sa vitesse est $\gamma'(t)$, son accélération est $\gamma''(t)$.

L'étude du mouvement amène à des E.D.

Par exemple avec la Loi fondamentale de la dynamique :

$m\gamma'' = F$.

Ex 13 • Pendule sans frottement $y''+\sin y=0$.

• 1ère loi de Kepler : la trajectoire des planètes est elliptique.

II.2 Représentation de la trajectoire

Déf 14 Soit (A) $y'=f(y)$, $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue

f est un champs de vecteurs.

Rem 15 Dessiner les vecteurs $f(y)$ permettent de deviner la trajectoire d'une solution.

Notons $f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))$

Déf 16 L'isocline verticale est la courbe donnée implicitement par $f_1(x,y)=0$.

Isocline horizontale : idem pour $f_2(x,y)=0$.

Rem 17 Les isoclines partagent le plan en régions où f_1 (et f_2) sont de signe constant.

Déf 18 (x,y) est un point stationnaire si $f_1(x,y)=f_2(x,y)=0$

Déf 19 Le portrait de phase de (A) est la représentation des trajectoires de solutions.

Prop 20 Si f est localement lipschitzienne, et y une solution maximale de (A) tq $\exists\, t_2>t_1$ tq $y(t_1)=y(t_2)$

Alors y est périodique.

Prop 21 Un point limite est stationnaire.

Ex 22 $\begin{cases} x'=e^x-y \\ y'=y-x+1 \end{cases}$ Voir annexe A

App 23 Système de Lotka - Volterra (proie - prédateurs)

$\begin{cases} p'=ap-bpr \\ r'=-cr+dpr \end{cases}$ p = proies, r = prédateurs (L-V)

Prop 24 Soient $t_0\in\mathbb{R}$, $p_0, r_0 \geq 0$

Il existe une unique solution maximale de (L-V) pour la condition (p_0, r_0) en t_0, définie sur $\mathbb{R}$.

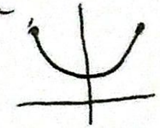
Si $p_0, r_0>0$ alors $t\mapsto (p(t), r(t))$ est périodique et >0.

DEV 1

III - Exemples célèbres de courbes en mécanique et géométrie

III.1 Situations concrètes

• La chaînette : un câble flexible suspendu décrit par $x\mapsto ch(x)$



• La cycloïde : mouvement d'un point sur une roue.
$\gamma : t\mapsto (t-\sin t,\ 1-\cos t)$

• La cardioïde : un point d'une roue, autour d'une autre roue. $\gamma : t\mapsto 2(1+\cos t)(\cos t, \sin t)$

Voir annexe B

III-2 Courbes de Bézier

Déf 25 Soient $p_0, p_1, p_2, p_3 \in\mathbb{R}^2$ points de contrôle.
Une courbe de Bézier est donnée par :

$$\underset{t\in[0,1]}{\beta(t)} = (1-t)^3 p_0 + 3t(1-t)^2 p_1 + 3t^2(1-t)p_2 + t^3 p_3.$$

Voir annexe C

III-3 Intersections d'objets géométriques

Voir annexe D : Ellipse, Hyperbole et Droites.

IV - Autres utilisations en analyse

IV-1 Connexité

Déf 26 Un espace topologique est connexe par arcs si pour tout couple de points de E, il existe une courbe $\gamma : [0,1] \to E$ reliant ces 2 points.

Prop 27 Tout espace connexe par arcs est connexe

Déf 28 La composante connexe de $x \in E$ est la plus grande partie connexe de E contenant x.

Ex 29 $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe.

IV-2 Dérivées partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, et si $v \in E$,

$$Df(a)v = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

C'est la dérivée de f dans la direction de v.

On a l'existence des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)e_i \quad \text{où } (e_i) = \text{base de } E.$$

IV-3 Indice d'une courbe

Déf 30 Un chemin fermé est une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Déf 31 Si f est continue sur $\gamma(I)$, l'intégrale de f le long de γ est : $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Déf 32 γ chemin fermé, $a \notin \gamma(I)$. L'indice de a par rapport à γ est $I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Prop 33 $a \mapsto I_\gamma(a)$ est à valeurs entières, continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, et nulle sur la C.C non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

DEV 2

IV-4 Calculs d'intégrales

Ω ouvert de $\mathbb{C}$,

Déf 34 Le résidu de f (holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$) au point a est le coefficient c_{-1} de sa série de Laurent en a, noté $\mathrm{Res}_f(a)$

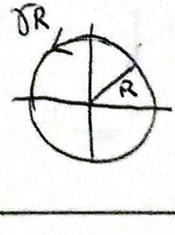
Thm 35 (des Résidus) Si f méromorphe sur Ω, $A = \{\text{pôles de } f\}$

Alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in A} I_\gamma(a)\,\mathrm{Res}_f(a)$.

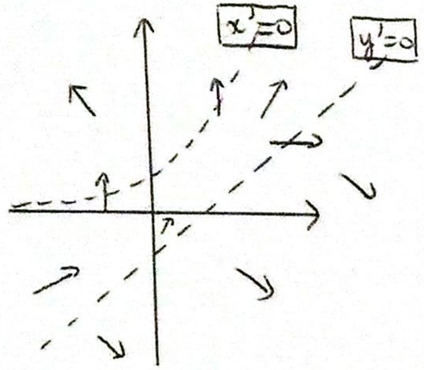
Ap 36

- $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$

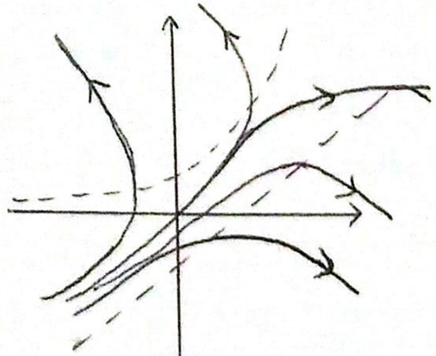
- $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{2z^2-5z+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } R < \frac{1}{2} \text{ ou } R > 2 \\ -\frac{2i\pi}{3} & \text{si } \frac{1}{2} < R < 2 \end{cases}$



suite DEV 2

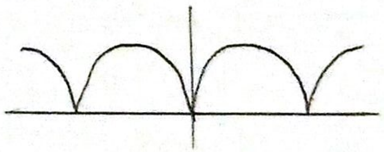


isoclines vert. et hor.
+ champs de vecteurs

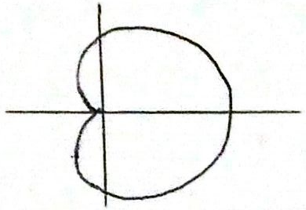


portrait de phase

ANNEXE A

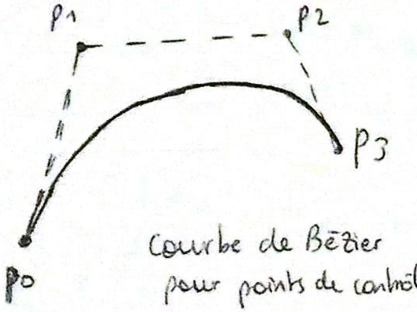


cycloïde

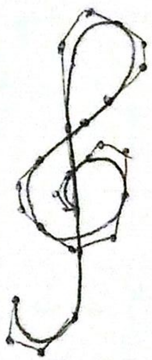


cardioïde

ANNEXE B

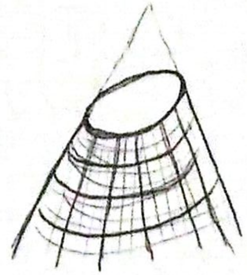


Courbe de Bézier
pour points de contrôle
P0, P1, P2, P3

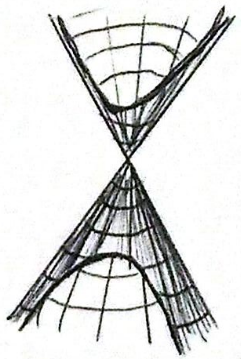


juxtaposition de
courbes de Bézier

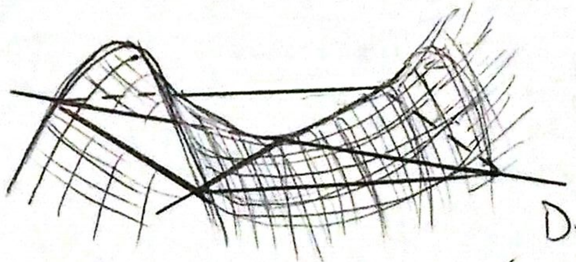
ANNEXE D



Ellipse
(section d'un cône)



Hyperbole (section d'un cône)



Droites
(section d'un paraboloïde hyperbolique)

Références : • Doss Bachelet, Françoise, Piquet : Géométrie différentielle avec 80 figures.
• Berthelin, équations différentielles
• Troyanov, Cours de géométrie
• Queffélec^2, Analyse complexe et app^{os}.

+ (anecdotique) :
• Analyse L3, Marco & Co
• Algèbre et calcul formel, Foissy - Ninet.
• Analyse de la Licence, JP Escofier