267 | Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

I - Définitions et premiers exemples :

DéF:1: On appelle conique l'intersection non vide entre un cône de révolution et un plan.

· Lorsque le plan ne contient pas le sommet du cône, on parle de coniques propres.
Selon l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône on obtient une hyperbole, une parabole, ou une ellipse. (cf. ANNEXE A)

· Lorsque le plan contient le sommet du cône, on parle de coniques dégénérées.

Rem:2: Les coniques peuvent être vues comme l'ensemble des points M satisfaisant $\frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = e$, où (D) est la directrice, F le foyer, et e l'excentricité.

· On peut également les voir comme l'ensemble des points $M(x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, vérifiant une égalité du type :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

où A, B, C, D, E, F sont des constantes et $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

DéF:3: . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

· On appelle courbe paramétrée ou paramétrisation une application $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ C^1 par morceaux.

· On appelle support de la courbe γ, son image $\gamma(I)$. Selon le contexte, il nous arrivera d'utiliser le mot "courbe" pour désigner son support.

· On dit que γ est régulière si pour tout $t\in I$, $\gamma'(t)\neq 0$.

. On dit que γ est simple si γ est injective.

. Si $I=[a,b]$, on dit que γ est fermée si $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Ex:4: (cf. ANNEXE B).

Rem:5: Une sous-variété de dimension 1 dans $\mathbb{R}^2$ est localement représentée par une courbe.

Ex:6: ~~ANNEXE~~

$\gamma_c: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (\cos t, \sin t)$	$\gamma_e: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$	$\gamma_h: [0,2\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\} \to \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (\frac{a}{\cos t}, b\tan t)$
param. du cercle unité	param. d'une ellipse	param. d'une hyperbole

Rem:7: Une courbe peut avoir plusieurs paramétrisations.

Ex:8: En intersectant le cercle unité par les droites $y=tx+t$, on obtient $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ dont l'image est le cercle unité privé de $(-1,0)$ (cf. ANNEXE C).

DéF:9: Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une courbe et $\varphi: J \to I$ difféo. Alors $\gamma\circ\varphi: J \to \mathbb{R}^2$ est une courbe de même support que γ appelée reparamétrisation.

Ex:10: En considérant $\varphi : [0,4\pi] \longrightarrow [0,2\pi]$, $t \longmapsto \frac{t}{2}$

on obtient $\tilde{\gamma}_c : [0,4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2})$.

II. Propriétés métriques, intégrale curviligne :

1. Longueur et abscisse curviligne :

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe.

DéF: 11: On définit la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) := \sup_{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \| \overrightarrow{\gamma(t_k)\gamma(t_{k+1})} \| \right).$$

Prop. 12: $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Ex:13: En utilisant γ_c (cf. Ex 6), $\ell(\text{cercle}) = 2\pi$

DéF: 14: γ est dite par abscisse curviligne si pour tout $[t_1,t_2] \subseteq [a,b]$, $\ell(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1$.

Prop: 15: On suppose que γ est régulière, $l := \ell(\gamma)$.

$s(t) := \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du$ pour tout $t \in [a,b]$,

$\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1} : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une reparamétrisation par abscisse curviligne

Ex: 16: $\gamma :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t, \sqrt{1-t^2})$, $s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u}}\, du$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sin s) = (\sin(s), \sqrt{1-\sin^2(s)}) = (\sin(s), \cos(s)).$$

2. Intégrale curviligne :

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ compact, ∂D (orienté positivement) courbe.

DéF: 17: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$ courbe paramétrée

et $\omega : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (P(x,y), Q(x,y))$ de classe C^1.

On définit l'intégrale curviligne de ω le long de γ par:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b [P(x(t),y(t))\, x'(t) + Q(x(t),y(t))\, y(t)]\, dt$$

Ex: 18: En prenant $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (2t+1, 3t+1)$

et $\omega : (x,y) \longrightarrow (-y, x)$, on a $\int_\gamma \omega = 5$

Théorème: 19: (Green-Riemann, admis)

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

App: 20: $\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy$. En prenant,

$\omega : (x,y) \longmapsto (P(x,y), Q(x,y))$ où $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$

G.R. $\Rightarrow$ $\text{Aire}(D) = \int_{\partial D} \omega$

Ex: 21: En prenant γ_c (cf. Ex 6), on obtient

$$\text{Aire}(\text{ellipse}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab\sin^2 t + ab\cos^2 t]\, dt = ab\pi$$

3. Applications :

Propos22 : (inégalité isopérimétrique). Soit Γ une courbe plane, régulière, fermée et sans point multiple. On note L sa longueur et A l'aire qu'elle délimite.

Alors, $4\pi A \leq L^2$.

Rem 23 : L'égalité est obtenue ssi Γ est un cercle.

Prop : 24 : Si Γ fermée, régulière, $[AB] \cap \Gamma = \emptyset$

Alors, il existe un plus court chemin de A à B passant par Γ.

Prop. 25 : Les méridiens sur la sphère fournissent les chemins les plus courts pour aller du pôle Sud au pôle Nord.

III – Applications en analyse : (E espace topologique)

1. Topologie :

DéF : 26 : E connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides.

Ex : 27 : $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe, $\mathbb{C}$ est connexe.

DéF : 28 : E connexe par arc si pour tout $(u,v) \in E^2$, il existe un arc γ joignant u à v.

Théo : 29 : Tout espace connexe par arc est connexe.

Rem : 30 : $\overline{\{(x, \sin\frac{1}{x}), x \in]0,+\infty[\}}$ connexe mais non-connexe par arc. (ANNEXE. E)

2. Analyse complexe : Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$

Déf : 31 : • $\gamma : I \to \mathbb{C}$ est un chemin si elle est continuement différentiable par morceaux, elle est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

• $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue, $\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

DéF : 32 : $\gamma : I \to \mathbb{C}$ fermé, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,d\xi$$

Théo : 33 : • $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs entières sur $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$

————— constantes sur les comp. connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$

————— nulle sur la composante non-bornée.

~~App~~ : 34 : $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto a + re^{it}$ $\leadsto$ $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$

App : 35 : $P \in \mathbb{C}[X]$ t.q. $P(z) \neq 0$ $\forall z \in C(0,1)$.

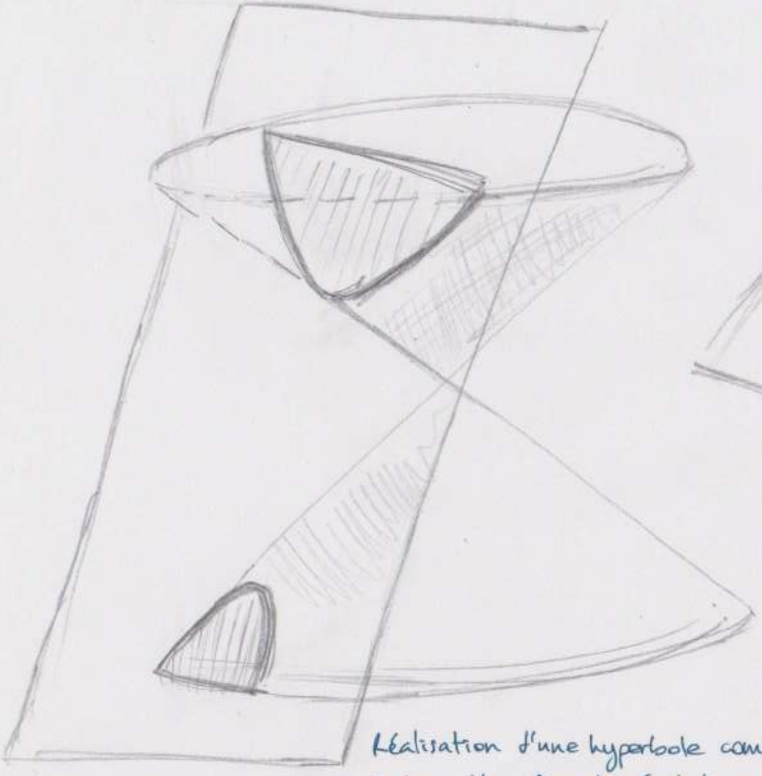
Soit $\gamma_p(t) := P(e^{it})$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Alors $\mathrm{Ind}_{\gamma_p(t)}(0)$ est égale au nombre de racines de P à l'intérieur de $C(0,1)$

Théo : 36 : (Cauchy) Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ fermé, Ω convexe t.q. $\gamma(I) \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

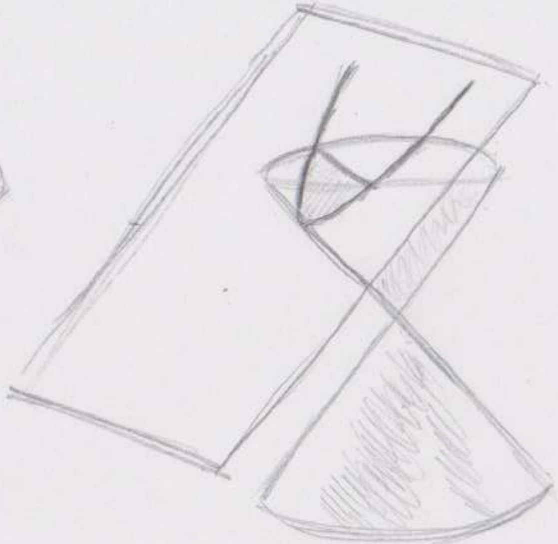
Si $z \in \Omega \setminus \gamma(I)$, alors $f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi$

App : 37 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

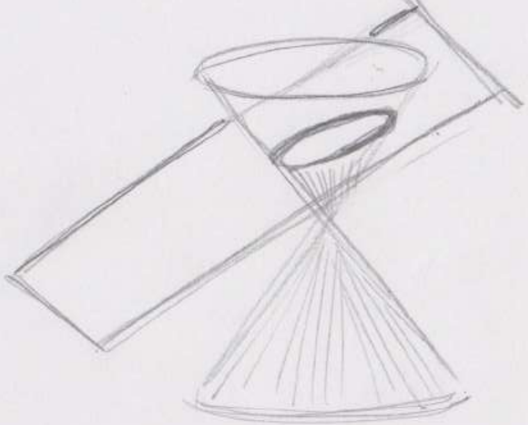
ANNEXE A



Réalisation d'une hyperbole comme section d'un cône de révolution par un plan.



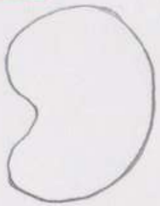
parabole.



ellipse.

ANNEXE B

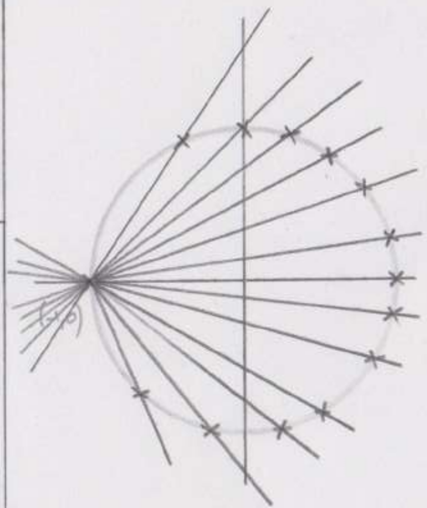
①



②

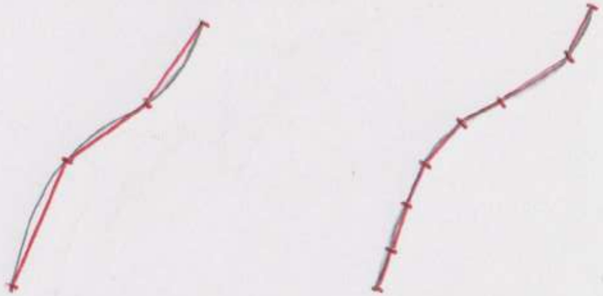
③

①, ② et ③ sont des supports de courbes.
① est fermée, ② n'est pas simple, ③ n'est pas régulière.



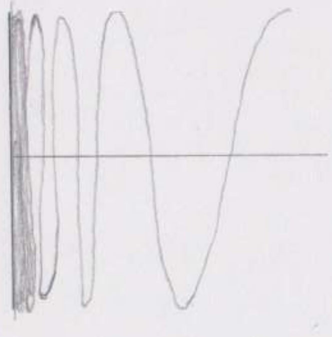
ANNEXE C.

Intersection du cercle unité par les droites passant par le point $(-1, 0)$ et de pente $t \in \mathbb{R}$.



ANNEXE D

Approximation de la longueur d'une courbe par celle d'une ligne polygonale.



ANNEXE E.

L'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est connexe mais non connexe par arcs.