912 Fonctions récursives primitives et non-primitives.

Objectif: donner une définition formelle de la notion de fonction calculable.

$\mathcal{F}_{CALC.} \subsetneq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$

I. Les fonctions primitives récursives

Notation: soit $k\in\mathbb{N}$. On note $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

Déf 1: $\mathcal{F}_{prim}$, l'ensemble des fonctions primitives récursives est défini par induction :

Fonctions de bases:

* $O() \mapsto 0$
* $\sigma : n \mapsto n+1$ (successeur)
* $\forall N\in\mathbb{N}$, $k\in[\![1,N]\!]$, $\pi_k^N : \overline{n} \mapsto n_k$ (projection)

Induction: * (Composition) Soit g d'arité l et $h_1, \ldots h_l$ d'arité k, on définit

$$f : \overline{n} \mapsto g(h_1(\overline{n}), \ldots h_l(\overline{n}))$$

* (Récursion primitive) Soit g d'arité k et h d'arité $k+2$, on définit :

$$\begin{cases} f(\overline{n}, 0) = g(\overline{n}) \\ f(\overline{n}, m+1) = h(\overline{n}, m, f(\overline{n}, m)) \end{cases}$$

Exemples: Toutes les constantes M:

* $M : () \mapsto \underbrace{\sigma(\sigma(\ldots \sigma}_{M \text{ fois}}(O())))$
* (Somme): $+(x,0) = x$
  $+(x, y+1) = \sigma(+(x,y))$
* (Produit): $*(x,0) = O()$
  $*(x,y+1) = +(x, *(x,y))$
* ("Prédecesseur"). $Pred(0) = 0$
  $Pred(m+1) = m$
* ("Différence") $Moins(n,0) = n$
  $Moins(n, m+1) = Pred(Moins(n,m))$

Déf 2: (Prédicats primitifs récursifs)
$A \subset \mathbb{N}^k$ est un prédicat primitif récursif ssi $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_{prim}$.

Exemple: $sg : n \mapsto \mathbb{1}_{\{n>0\}} \in \mathcal{F}_{prim}$ car:

* $sg(0) = 0$
* $sg(m+1) = 1$

Donc $\Delta = \{(n,m)\in\mathbb{N}^2 / n > m\}$ est primitif récursif ($\mathbb{1}_\Delta = sg(Moins(.,.))$)

Prop 1: si $A, B \subset \mathbb{N}^k$ sont primitifs récursifs alors les ensembles suivant le sont aussi

* $A\cap B$ car $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
* $A\cup B$ car $\mathbb{1}_{A\cup B} = sg(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)$
* $\overline{A}$ car $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Rem 1: si l'on considère $a (= \mathbb{1}_A)$ et $b (= \mathbb{1}_B)$ comme fonctions booléennes alors :

(a et b), (a ou b) (non a) sont également des prédicats primitifs récursifs.

Déf. 3 (Quantification bornée)

Prop 2: soit $m \in \mathbb{N}$ fixé et $p : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ un prédicat, $p \in \mathcal{F}_{prim}$ (considéré comme booléen)
Alors les prédicats suivants:

$\forall i \in [\![0,m]\!]\ p(\bar{n},i)$ (Quantification universelle)
et $\exists i \in [\![0,m]\!]\ p(\bar{n},i)$ (Quantification existentielle)

Sont également prim. récursifs, en tant que produit (resp. somme) de tels prédicats.

Prop. 3: (fonctions définies par cas)
Soient $g_1, \dots g_\ell \in \mathcal{F}_{prim}$ d'arité k et $p_1, \dots p_\ell$ des prédicats primitifs récursifs.

Alors $f(\bar{n}) = \begin{cases} g_1(\bar{n}) & \text{si } p_1(\bar{n}) \\ \vdots & \\ g_\ell(\bar{n}) & \text{si } p_\ell(\bar{n}) \end{cases}$

est également primitive récursive.

Déf 4: (Minimisation bornée)
Soit $q : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ un prédicat prim. réc. et $m \in \mathbb{N}$ fixé. On définit

$$\mu i \leq m = \begin{cases} * \text{le plus petit } i \in [\![0,m]\!] \text{ tel que } q(\bar{n},i) \\ * 0 \text{ si un tel } i \text{ n'existe pas} \end{cases}$$

Prop 4: la fonction ainsi définie est également primitive récursive.

II. Les limites des fonctions récursives primitives

1) Argument diagonal

Prop 1:
L'ensemble des fonctions primitives récursives est dénombrable et il existe un algorithme qui énumère ses éléments d'arité 1.
Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite ainsi obtenue.

Alors la fonction $g : n \mapsto f_n(n)+1$ est calculable par procédure effective, mais il n'existe pas d'entier $n_0 \in \mathbb{N} / g = f_{n_0}$, donc $g \notin \mathcal{F}_{prim}$.

2) La fonction d'Ackermann

Déf 1:
- $A(0,n) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $A(m+1,0) = A(m,1) \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- $A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n))$

Prop 2: par récurrence, $\forall m \forall n$ $A(m,n)$ est calculable par procédure effective

Notation: $A_m = n \mapsto A(m,n)$

Prop 3:
- $\forall m \in \mathbb{N}$, $n \mapsto A_m(n)$ est croissante
- $A_{m+1} > A_m$ (en tant que fonction)
- $A_m(n) > n$ et $A_m(n+1) \leq A_{m+1}(n)$

Prop: la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive] DEV

Conclusion: il existe des fonctions calculables par procédure effective qui ne sont pas récursives primitives.

III. Une classe de fonctions plus générale

Déf 1: $q : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ est un prédicat sûr si
$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N}^k,\ \exists i \in \mathbb{N} \ /\ q(\bar{n}, i) = 1$$

Déf 2: (Minimisation non-bornée de prédicats sûrs)
Soit $q : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ est prédicat prim. réc sûr.
Alors $\mu i\, q(\bar{n}, i) = \inf\{i / q(\bar{n}, i) = 1\}$
est la minimisation non-bornée du prédicat q.

Déf 3 (Fonctions μ-récursives)(totales)
$\mathcal{F}_{\mu\text{-réc.}}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{F}_{prim.}$ et stable par

* Composition
* Récursion primitive
* Minimisation non-bornée de prédicats sûrs.

Lemme: il existe une représentation effective des entiers naturels par des chaînes de caractères.

Exemple: représentation en base binaire, ou décimale

Déf 4: $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est calculable s'il existe un alphabet Σ et une représentation effective $\mathbb{N}^k \to \Sigma$, s'il existe une $M \cdot T$ $\mathcal{M}$ telle que l'exécution de $\mathcal{M}$ sur la représentation de $\bar{n}$ termine dans une configuration correspondant à la représentation de $f(\bar{n})$

Prop 1: * toute fonction calculable par machine de Türing est μ-récursive] DEV
* Toute fonction μ-réc. est calculable par M.T.

Déf. 5: (Fonctions μ-récursives partielles)
$\mathcal{F}_{\mu\text{-réc. partielle}}$ est l'ensemble des fonctions de $A \to \mathbb{N}$, où $A \subset \mathbb{N}^k$, le plus petit contenant $\mathcal{F}_{prim}$ et stable par

* Composition
* Récursion primitive
* Minimisation non-bornée
(si $\nexists i \ / \ q(\bar{n}, i) = 1$, alors $f(\bar{n})$ n'est pas définie)

Prop 2: une fonction partielle est μ-récursive si elle est calculable par M.T
(Si f est non-définie en $\bar{n}$, alors la M.T ne s'arrête pas sur la représentation de $\bar{n}$ ou indique que le résultat n'est pas définie.)

Ex: $f = \begin{cases} 2\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{non définie} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

est μ-récursive partielle.

Prop 3: il existe des fonctions qui ne sont ni récursive primitive ni récursive non-primitive.
(Ex: fonction du castor affairé)

Références :

- P. Wolper "Intro. à la calculabilité"
- P. Dehornoy "Mathématiques de l'informatique"
- Cori-Lascar "Logique Mathématique 2"
- O. Carton "langages formels, calculabilité complexité"