912

Fonctions récursives primitives et non primitives - Exemples

Q ça suffit ? $\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ [encodage]

On considère les fonctions définies sur les naturels et on cherche à modéliser la notion intuitive de calculabilité.

I. Fonctions récursives primitives.

1. Construire des fonctions primitives récursives.

Déf <u>Fonctions primitives récursives de base</u> [Wol p121]
- fonction zéro : $O()$, pas d'argument, renvoie zéro
- projections : $\pi_i^k(n_1, \dots n_k) = n_i$, $k \geq 1$, $i \in [1, k]$
- successeur : $\sigma(n) = n+1$.

Rq π_1^1 est l'identité

Déf <u>Schéma de composition</u> [Car p.121]

$\begin{cases} f_1, \dots, f_p \text{ fonctions où } f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{k_i} \\ g : \mathbb{N}^{k_1 + \dots + k_p} \longrightarrow \mathbb{N}^r \end{cases}$

la composée $g(f_1, \dots f_p) : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^r$
$n = (n_1, \dots n_k) \mapsto g(f_1(n), \dots f_p(n))$

Ex les fonctions constantes s'écrivent par composition de successeur et de la fonction zéro. $un = \sigma(zéro)$.

Déf <u>Schéma de récurrence</u> $\begin{bmatrix} f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^r \\ g : \mathbb{N}^{k+r+1} \to \mathbb{N}^r \end{bmatrix}$

$h = Rec(f, g)$ est défini par
$\begin{cases} h(0, m) = f(m) \\ h(n+1, m) = g(n, h(n,m), m) \end{cases}$ [Car p.12]

Ex $somme = Rec(\pi_1^1, \sigma(\pi_2^2))$
produit : $mult = Rec(0, somme(\pi_2, \pi_3))$
prédécesseur : $pred = Rec(0, \pi_1)$

Déf <u>La famille des fonctions primitives récursives</u> est la plus petite famille de fonctions telles que
i) zéro, les projections, successeurs sont primitives récursives
ii) la famille est close par schémas de composition et de récurrence.

Ex somme, produit, prédecesseur sont primitives récursives
factorielle est primitive récursive car $fact = Rec(0, mult(\pi_1))$
puissance est primitive récursive
différence, signe sont primitives récursives.

2. Prédicats et minimisation bornée

Déf Un <u>prédicat</u> est une fonction à valeurs dans $\{V, F\}$ [Wol p125]

Rq On peut voir un prédicat à k arguments comme un sous ensemble de $\mathbb{N}^k$.

Ex le prédicat "$n < m$" correspond au sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ contenant les paires (n, m) où $n < m$.

Déf la <u>fonction caractéristique</u> f d'un prédicat P est
$f : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$
$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } P(n) \text{ est vrai} \\ 0 & \text{si } P(n) \text{ est faux} \end{cases}$

Déf Un <u>prédicat est primitif récursif</u> si sa fonction caractéristique est primitive récursive.

Ex $est\text{-}zéro = Rec(1, 0) \longrightarrow$ le prédicat $P(n) =$ "$n = 0$" est primitif récursif

Ex $ITE(P, t, e)(n) = P(n) \times t(n) + (1 - P(n)) \times e(n)$
if P then t else e est primitif récursif

Déf La <u>minimisation bornée</u> permet de définir une fonction à partir d'un prédicat $q(n, i)$, $n \in \mathbb{N}^k$. [Wol p128]

$\mu i \leq m \; q(n, i) = \begin{cases} \text{le plus petit } i \leq m \text{ tel que } q(n,i) = 1 \\ 0 \text{ s'il n'y en a pas.} \end{cases}$

Prop si $q(n, i)$ est primitif récursif, alors $\mu i \leq m \, q(n, i)$ est primitif récursif

Ex FOR est primitif récursif (minimisation bornée avec comme prédicat "faux").

? lien intuitif avec "for" important mais $\boxed{\text{dur à formaliser}}$.
peut-être ne pas faire de lien en fait ...

[Car, p189]

Ex la division euclidienne et le reste sont primitifs récursifs :

$$\begin{cases} div(m,n) = \text{if } m<n \text{ then } 0 \\ \qquad\qquad \text{else } \mu i \leq m \;\; n(i+1)>m. \\ mod(m,n) = m - mult(n, div(m,n)) \end{cases}$$

[Wol p129]

II. Les limites du modèle.

1. Cardinalité

Prop les fonctions primitives sont en nombre dénombrable, de par leur construction.

Rq les fonctions sont en nombre indénombrable car les prédicats sont déjà en nombre indénombrable.

Coro Il existe des fonctions non primitives récursives.

Rq On peut en construire avec un argument diagonal.

2. La fonction d'Ackermann

Déf On appelle fonction d'Ackermann $(n,x) \mapsto A_n(x)$ si

$$\begin{cases} A_0(x) = x+1 \\ A_n(0) = A_{n-1}(1) \quad \forall n \geq 1 \\ A_n(x) = A_{n-1}(A_n(x-1)) \quad \forall n,x \geq 1 \end{cases}$$

Prop $\forall n$, A_n est primitive récursive

DEV [Wol p131]

Thm $(n,x) \mapsto A_n(x)$ n'est pas primitive récursive

On veut donc étendre le modèle pour atteindre la fonction d'Ackermann.

III. Fonctions μ-récursives

[Wol p131]

On rajoute un schéma de construction :

Déf Minimisation non bornée, noté $\mu i\, q(n,i)$ est tel que $\mu i\, q(n,i) = \begin{cases} \text{le plus petit } i \text{ tel que } q(n,i) \\ 0 \text{ si il n'y en a pas} \end{cases}$

Rq ~~la minimisation non bornée appliquée à des prédicats primitifs récursifs ne donne que des fonctions primitives récursives.~~

Rq ce nouveau schéma correspond au WHILE

Pour éviter les cas où le calcul ne termine pas :

Déf $q(n,i)$ est sûr si $\forall n\, \exists i\; q(n,i) = 1$.

Déf les fonctions et prédicats μ-récursifs sont ceux obtenus à partir de zéro, π_i^k, σ par

- composition
- récurrence
- minimisation non bornée de prédicats sûrs

Rq il y en a un nombre dénombrable.

Rq Vu qu'on peut construire IfThenElse, For, While, il semblerait qu'on atteigne toutes les fonctions "calculables".

Thèse de Church-Turing : les fonctions calculables par une procédure effective sont celles calculables par machine de Turing

Thm Toute fonction récursive est calculable par une machine de Turing

DEV Thm Toute fonction calculable par une machine de Turing est μ-récursive

Rq Il existe des fonctions qui ne sont pas μ-récursives, mais elles ne sont donc pas calculables.

Ex Le castor affairé n'est pas calculable

C : n ↦ nombre maximal de 1 écrit sur le ruban d'une machine de Turing à n états partant d'un ruban vide, à un état final, qui s'arrête

mettre plus tôt dans le plan

Rq Savoir si un prédicat est sûr est un problème qui n'est pas calculable.

– fonctions μ-récursives $\boxed{\text{partielles}}$?
semi-calculabilité
↳ sinon il y a tout

Références :

[Wol] : Wolper, Introduction à la calculabilité

[Car] : Carton, Langages formels

[Deh] : Dehornoy, Mathématiques de l'informatique