917

Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique

Motivation : - Formaliser les maths
- Automatiser les preuves
- Applications en programmation logique et base de données

I Syntaxe [CL] chap 3.1

1) Les langages du premier ordre

Def 1 : Un langage du premier ordre est la donnée de :

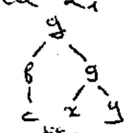
- partie commune : - $\mathcal{V}$ ensemble infini dénombrable de variables
  - parenthèses $\{(,)\}$
  - connecteurs $\{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
  - quantificateurs $\{\forall, \exists\}$
- partie spécifique : - $\mathcal{C}$ ensemble de constantes
  - $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'ensembles de symboles de fonctions d'arités n
  - $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'ensembles de symboles de prédicats d'arité n

Ex 2 : $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, $\mathcal{R}_2 = \{R\}$ et $\mathcal{L}_1 = \mathcal{C} \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{R}_2$

2) Termes

Def 3 : Ensemble des termes $\mathcal{T}$ défini par induction :
- $\mathcal{C} \cup \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$
- Si $f \in \mathcal{F}_n$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, alors $f t_1 \dots t_n \in \mathcal{T}$

Ex 4 : $t = gfcgxy$ est un terme de $\mathcal{L}_1$ représenté par l'arbre :



Def 5 : Un terme sans variable est clos

Notation : On note $t[v_1, \dots, v_n]$ si les variables de t sont dans $v_1, \dots, v_n$

Def 6 : Soit $t[v_1, \dots, v_n]$ un terme et $t_1, \dots, t_n$ des termes. Le terme $t[{}^{t_1}/_{v_1}, \dots, {}^{t_n}/_{v_n}]$ est défini inductivement en remplaçant toutes les occurences de v_i par t_i dans t.

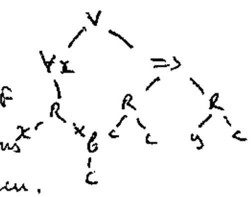
Ex 7 : $t[{}^{fc}/_x, {}^{c}/_y]$ donne

3) Formules

Def 7 : F est une formule atomique si $F = R t_1 \dots t_n$ avec $R \in \mathcal{R}_n$, $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$

Def 8 : Ensemble des formules $\mathcal{F}$ défini par induction :
- $\{\text{formule atomique}\} \subset \mathcal{F}$
- Si $F, G \in \mathcal{F}$, si $\alpha \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ alors $(F \alpha G) \in \mathcal{F}$
- Si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$
- Si $x \in \mathcal{V}$, $F \in \mathcal{F}$ alors $\forall x F \in \mathcal{F}$, $\exists x F \in \mathcal{F}$

Ex 9 : $F = (\forall x\, R x f c \vee (R y c \Rightarrow R c c))$ est une formule représentée par l'arbre :



Def 10 : Une variable est libre dans F si l'une de ses occurences au moins est sous la portée d'un quantificateur. Liée sinon

Ex 11 : Dans F, x est liée et y ne l'est pas.
Dans $G = (\forall x\, R x y \vee \exists x\, R y x)$ x est liée et y est libre

Def 12 : Une formule est close si aucune de ses variables n'est libre.

Notation : On note $F[v_1, \dots, v_n]$ si les variables libres de F sont parmi $v_1, \dots, v_n$

Def 13 : La clôture universelle de $F[v_1, \dots, v_n]$ est $\forall v_1 \dots \forall v_n F$

Def 14 : Soit $F[v_1, \dots, v_n]$ une formule et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$
La formule $F[{}^{t_1}/_{v_1}, \dots, {}^{t_n}/_{v_n}]$ est définie inductivement en remplaçant toutes les occurences libres de v_i par t_i.

Ex 15 : $G[{}^{fc}/_y]$ donne $(\forall x\, R x f c \vee \exists y \exists x\, R y x)$

II Sémantique [CL] chap 3.2, 3.3

1) Interprétation et satisfaction

Def 16 : Une structure $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{L}$ est la donnée de :
- un domaine $M \neq \emptyset$
- des symboles $c^{\mathcal{M}}$ pour chaque $c \in \mathcal{C}$
- des applications $f^{\mathcal{M}} : M^k \to M$ pour chaque $f \in \mathcal{F}_k$
- les sous-ensembles $R^{\mathcal{M}}$ de M^k pour chaque $R \in \mathcal{R}_k$

Ex 17 : $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, 0, s, +, \leq)$ est une structure pour $\mathcal{L}_1$

Def 18 : Une valuation Φ est une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to M$ prolongée aux termes par induction par :
- $\Phi(c) = c^{\mathcal{M}}$ pour $c \in \mathcal{C}$
- $\Phi(f t_1 \dots t_m) = f^{\mathcal{M}}(\Phi(t_1), \dots, \Phi(t_m))$

Def 19 : On définit par induction la satisfaction de F par une valuation Φ :
- $F = R t_1 \dots t_m$, alors Φ satisfait F si $(\Phi(t_1), \dots, \Phi(t_m)) \in R^{\mathcal{M}}$
- pour $\{\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G), (F \Leftrightarrow G)\}$ on définit la satisfaction comme en calcul propositionnel
- $F = \forall x\, G$, alors Φ satisfait F si pour tout $a \in M$, la valuation Φ_a définie par $\Phi_a(x) = a$, $\Phi_a(y) = \Phi(y)$ si $y \in \mathcal{V} \setminus \{x\}$ satisfait G.
- $F = \exists x\, G$, alors Φ satisfait F si il existe $a \in M$ tel que Φ_a satisfait G.

Rq : La satisfaction d'une formule ne dépend que de la valeur sur les variables libres.

Ex 20 : Dans $\mathcal{M}_1$, pour $H = \forall y\, R x y$, $\Phi_1 : x \to 0$, $\Phi_2 : x \to 1$
Φ_1 satisfait H, mais pas Φ_2

Def 21 : Soit $t = t[v_1, \dots, v_m]$ et $F = F[v, v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k]$
La substitution $F[t/v]$ est licite si v n'est sous la portée d'aucun quantificateur $\forall v_i$, $\exists v_i$ dans F.

Ex 22 : Pour $t = g y c$ et $F = \forall y\, R y x$, la substitution $F[t/x]$ n'est pas licite.
Dans $\mathcal{M}_1$, $F = \forall y\; y \leq x$, $F[t/x] = \forall y\; y \leq y + 0$

Prop : Si la substitution $F[t/x]$ est licite alors :
$\forall x F \Rightarrow F[t/x]$ et $F[t/x] \Rightarrow \exists x F$ sont valides

2) Formules valides et modèles

Def 23 : Soit F close et $\mathcal{M}$ une structure. On dit que $\mathcal{M}$ est un modèle de F si F est satisfaite par une valuation Φ de $\mathcal{M}$.
On note $\mathcal{M} \models F$
$\mathcal{M}$ est un modèle de F non close si c'est un modèle d'une clôture universelle

Ex 24 : $\exists x \exists y\, R x y$ est valide dans $\mathcal{M}_1$

Def 25 :
- F est universellement valide si pour toute structure $\mathcal{M} \models F$
- F est contradictoire si $\neg F$ est universellement valide
- $F \equiv G$ si $(F \Leftrightarrow G)$ est universellement valide

Ex 26 : $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$

Prop 27 : Si $F \equiv F'$ et $G \equiv G'$ alors si $\alpha \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, on a $(F \alpha G) \equiv (F' \alpha G')$ et $\neg F \equiv \neg F'$, $\forall x F \equiv \forall x F'$, $\exists x F \equiv \exists x F'$

Def 28 : Une théorie T est un ensemble de formules closes

Def 29 : $\mathcal{M}$ est un modèle de T si pour chaque $F \in T$, $\mathcal{M} \models F$

Def 30 : Une théorie T est consistante si elle admet un modèle, contradictoire sinon.

Def 31 : $F \in \mathcal{F}$ est conséquence sémantique de T, noté $T \models^* F$ si tout modèle de T est modèle de F.

Prop 32 : $T \models^* F$ si et seulement si $T \cup \{\neg F\}$ contradictoire

III Formes normales [<L] chap 3.4

1) Formes prénexes

Def 33 :
- F est prénexe si $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\, G$ avec $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, G formule sans quantificateurs
- F est prénexe polie si en plus chaque variable n'apparaît qu'une fois dans le préfixe $Q_1 x \dots Q_n x_n$

Prop 34 : Toute formule est équivalente à une formule prénexe polie

Ex 35 : $\forall x (R x y \wedge R f x y)$ est une forme prénexe polie de $(\forall x\, R x y \wedge \forall x\, R f x y)$

Rq : Si G est sous forme normale conjonctive (resp. disjonctive) on parle de forme prénexe conjonctive (resp. disjonctive)

2) Formes de Skolem

Skolemisation : Soit F prénexe polie.
On construit F_{Sk} formule prénexe polie sans quantificateurs existentiels à partir de F en remplaçant les variables quantifiées par $\exists$ à l'aide de nouveaux symboles dits fonctions de Skolem et constantes de Skolem.
F_{Sk} est une forme de Skolem de F.

Rq 36 : • Il n'y a pas unicité de la forme de Skolem
• F et F_{Sk} ne sont pas sémantiquement équivalentes

Prop 37 : F admet un modèle ssi F_{Sk} admet un modèle
[DEV]

IV Système de déduction [CL] chap 4.5

1) Résolution

Def 38 : Une clause universelle est de la forme :
$$\forall v_1 \dots \forall v_n (\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m)$$
où A_i et B_i sont des formules atomiques.
On notera $C = (\Gamma, \Delta)$ avec $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$
$\Delta = \{B_1, \dots, B_m\}$

Def 39 : Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ ensemble de formule atomique. Il est unifiable s'il existe une substitution α tq :
$$\alpha A_1 = \dots = \alpha A_n$$

Ex 40 : $\{Rxgyc,\ Rfcgfcz,\ Rygfcz\}$ est unifiable par
$\sigma : x \to fc,\ y \to fc,\ z \to c$

Def 41 : Soit $C_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ et $C_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ deux clauses telles que C_1 et C_2 soient sans variables communes et soit $\emptyset \subsetneq P_1 \subsetneq \Delta_1$ et $\emptyset \subsetneq N_2 \subsetneq \Gamma_2$ avec $P_1 \cup N_2$ unifiables par σ.
C se déduit par résolution, notée $\dfrac{C_1 \quad C_2}{C}$ si :
$C = (\Gamma, \Delta)$ avec $\Gamma = \sigma(\Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus N_2))$
$\Delta = \sigma((\Delta_1 \setminus P_1) \cup \Delta_2)$

Def 42 : Soit Γ ensemble de clauses. Une réfutation de Γ est une suite $(C_1, \dots, C_n)$ de clauses se terminant par $\square$ tq soit C_i est dans Γ, soit C_i se déduit de deux clauses précédentes par résolution.

2) Lien entre syntaxe et sémantique

Prop 43 : (Validité)
Soit $\dfrac{C_1 \quad C_2}{C}$; si $\mathcal{M}$ est un modèle de C_1 et C_2, alors $\mathcal{M}$ est un modèle de C.

Prop 44 : (Complétude)
Soit Γ un ensemble de clauses contradictoire, alors il existe une réfutation de Γ.

Prop 45 : (Compacité)
T est contradictoire si et seulement si il existe $T_0 \subset T$ fini qui est contradictoire

Applications :
• Si T a des modèles de cardinal arbitrairement grand, alors T a un modèle infini
• La propriété "être de cardinal fini" n'est pas exprimable en logique du premier ordre

Prop 46 : (Lowenheim-Skolem) [CL] T2 p156 / [DNR] p93
Si une théorie T possède un modèle infini, alors T possède un modèle dénombrable (si le langage Σ du premier ordre est dénombrable

DVPT

Complétude de la méthode de Résolution

Énoncé : Soit $\Gamma = \{C_1, \dots C_n\}$ un ensemble de clauses universelles qui n'a pas de modèle, alors Γ est réfutable par résolution

Étapes : 1) Construction d'un modèle de Herbrand
2) Lien avec le calcul propositionnel
3) passer d'une preuve par coupure à une preuve par résolution

Notations et Définitions :

- On note $V = \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des variables du langage $\mathcal{L}$ considéré, et T l'ensemble de ses termes

- Si C est une clause universelle, on notera C^+ l'ensemble des formules atomiques de sa conclusion et C^- celui de sa prémisse.

- On abrègera désormais "clause universelle" en "clause"

définitions similaires pour la coupure.

- Si Δ est un ensemble de clauses et D une clause, on dit que D est démontrable par résolution à partir de Δ s'il existe une suite $(D_1, \dots D_n)$ telle que $D = D_n$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $D_i \in \Delta$, soit il existe j, k inférieurs à i tels que D_i se déduise par résolution de D_j et D_k.
- On dit que Δ est réfutable par résolution si $\square$ est démontrable à partir de Δ.

1) Un modèle de Herbrand est un modèle dont l'ensemble de base est exactement T.
On a alors une interprétation immédiate pour les symboles de fonctions qui est :

Si f est un symbole de fonction d'arité n, l'interprétation de f est la fonction de T^n dans T qui à $t_1 \dots t_n$ associe $ft_1 \dots t_n$

Notons P l'ensemble des formules atomiques.
Pour définir complètement le modèle, il faut décider, pour chaque symbole de relation n aire et chaque suite $t_1 \dots t_n \in T^n$, si $Rt_1 \dots t_n$ est vrai.

Autrement dit on peut construire un modèle différent pour chaque fonction δ de P dans $\{0,1\}$, noté M_δ.

2) Considérons les éléments de P comme des variables propositionnelles et donc δ comme une valuation, que l'on peut étendre aux formules sans quantificateurs.
d'où : $\boxed{M_\delta \models F \text{ ssi } \delta(F) = 1}$

Soit maintenant $G = \forall v_1 \dots \forall v_n F[v_1 \dots v_n]$ une formule universelle.
M_δ est un modèle de G si et seulement si
pour tout $t_1 \dots t_n \in T$, $M_\delta \models F[t_1 \dots t_n]$
ie pour toute substitution σ, $M_\delta \models \sigma(F)$ ie $\delta(\sigma(F)) = 1$

Soit maintenant $\Gamma = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ un ensemble de clauses qui n'a pas de modèle.

Posons $X = \{\sigma(\mathcal{C}_i),\ i \in [\![1, n]\!],\ \sigma \text{ substitution}\}$.

X n'est pas propositionnellement satisfiable car, si il existait une distribution de valeurs de vérité sur P satisfaisant X, M_f serait un modèle de Γ.

Par théorème de compacité du calcul propositionnel, il existe un sous ensemble fini X_0 de X qui n'est pas propositionnellement satisfiable.

Par complétude de la méthode de coupure, il existe une réfutation par coupure de X_0.

3) Transformons cette réfutation par coupure de X_0 en réfutation par résolution de Γ.

Notation : Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux clauses. On notera $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ si $\mathcal{C}^+ \subseteq \mathcal{D}^+$ et $\mathcal{C}^- \subseteq \mathcal{D}^-$

Lemme : Soit $\mathcal{D}$ une clause démontrable par coupure à partir de X, alors il existe une clause $\mathcal{E}$ démontrable par résolution à partir de Γ et une substitution τ telles que $\tau(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$

Preuve du lemme :

Soit $D_1, \dots, D_n$ la démonstration par coupure de D.
On travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n = 1$, $D_1 = D \in X$, ie il existe une substitution σ et une clause C_i de Γ telle que $D = \sigma(C_i)$.

- $[\![1, n-1]\!] \Rightarrow n$

On a différents cas possibles selon la manière dont on obtient D_n dans la démonstration :

- Si $D_n \in X$, cf initialisation

- Si D_n se déduit de D_i ($i < n$) par une règle de simplification

  On a $D_i \subseteq D_n$, car $D_i^+ = D_n^+$ et $D_i^- = D_n^-$

  Par hypothèse de récurrence, il existe une clause C démontrable par résolution à partir de Γ et une substitution τ telles que $\tau(C) \subseteq D_i$.
  Donc $\tau(C) \subseteq D_n$

- D_n est obtenue par coupure à partir de D_i et D_j ($i, j < n$)

  Par hypothèse de récurrence, il existe C_1, C_2 et τ_1, τ_2 telles que $\tau(C_1) \subseteq D_i$ et $\tau(C_2) \subseteq D_j$

  On aimerait appliquer une règle de résolution, mais on doit séparer les variables de C_1 et C_2.
  Soit σ une permutation de V telle que C_1 et $\sigma(C_2)$ soient séparées.
  Il existe alors une substitution μ telle que
  $\mu(v_i) = \tau_1(v_i)$ si v_i est une variable apparaissant dans C_1
  $\mu(v_i) = \tau_2 \circ \sigma^{-1}(v_i)$ si v_i est une variable apparaissant dans $\sigma(C_2)$

D'où $\mu(\mathcal{E}_1) = \tau_1(\mathcal{E}_1) \subseteq D_i$

et $\mu(\sigma(\mathcal{E}_2)) = \tau_2(\mathcal{E}_2) \subseteq D_j$

$$\mathcal{E}_1 = (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_s)$$
$$\sigma(\mathcal{E}_2) = (C_1 \wedge \dots \wedge C_k) \Rightarrow (D_1 \vee \dots \vee D_m)$$

Comme on peut appliquer la règle de coupure à D_i, D_j, il existe $\mathcal{E}$ formule atomique telle que $\mathcal{E} \in D_i^+ \cap D_j^-$ (ou l'inverse)

Comme D_n est obtenu par coupure de D_i et D_j, on a :

$$D_i^- \cup D_j^- - \{\mathcal{E}\} \subseteq D_n^- \quad \text{et} \quad D_i^+ \cup D_j^+ - \{\mathcal{E}\} \subseteq D_n^+$$

d'où $\mu(\mathcal{E}_1)^+ \cup \mu(\sigma(\mathcal{E}_2))^+ - \{\mathcal{E}\} \subseteq D_n^+$

$$\mu(\mathcal{E}_1)^- \cup \mu(\sigma(\mathcal{E}_2))^- - \{\mathcal{E}\} \subseteq D_n^-$$

On distingue plusieurs cas pour le choix de la clause voulue

- Si $\mathcal{E} \notin \mu(\mathcal{E}_1)^+$, $\mu(\mathcal{E}_1) \subseteq D_n$ et on a donc ce qu'on veut
- De même si $\mathcal{E} \notin \mu(\sigma(\mathcal{E}_2))^-$
- Sinon, on va unifier $Y = \{B_i, \mu(B_i) = \mathcal{E}\} \cup \{C_j, \mu(C_j) = \mathcal{E}\}$ et appliquer la règle de résolution à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$

- On commence par séparer $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, ce qui nous donne $\mathcal{E}_1$ et $\sigma(\mathcal{E}_2)$. Soit maintenant ρ un unificateur principal de Y, comme μ unifie Y, on a une substitution τ, $\mu = \tau \circ \rho$.
- Par résolution on a alors une clause $\mathcal{E}_3$ qui vérifie les propriétés voulues.

Fin de la démonstration :

On applique le lemme à la clause vide, on a donc une clause $\tilde{\mathcal{E}}$, démontrable par résolution à partir de Γ et une substitution σ telles que $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \Box$, i.e. $\mathcal{E} = \Box$

Algorithme de Skolem

Énoncé : On présente un algorithme transformant une formule sans variable libre F en une formule sous forme clausale F' vérifiant la propriété :

F admet un modèle si et seulement si F' admet un modèle

Étapes : 1) Présentation de l'algorithme avec utilisation sur un exemple

2) Preuve de la propriété

1) Soit F une formule du premier ordre sans variable libre. L'algorithme s'effectue en six étapes

Exemple : $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall x\; p(x)) \Rightarrow (\forall x\; q(x)))$

Étape 1 : renommer les variables liées pour que chaque quantification s'applique à une variable distincte.

Exemple $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall y\; p(y)) \Rightarrow (\forall z\; q(z)))$

Étape 2 : Éliminer tous les opérateurs booléens binaires autre que $\wedge$ et $\vee$

Exemple : $\neg \forall x\,(\neg p(x) \vee q(x)) \;\vee\; \neg \forall y\; p(y) \vee \forall z\, q(z)$

Étape 3 : déplacer les opérateurs $\neg$ de manière à ce qu'ils ne s'appliquent qu'à des formules atomiques.

Exemple : $\exists x (p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \exists y \neg p(y) \vee \forall z\, q(z)$

Étape 4 : passer la formule en forme prénexe, i.e. amener les quantificateurs en début de formule.

Exemple : $\exists x \exists y \forall z \, (p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \neg p(y) \vee q(z)$

Étape 5 : mettre la formule sans quantificateurs sous forme normale conjonctive.

Exemple : $\exists x \exists y \forall z \, (p(x) \vee \neg p(y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(y) \vee q(z))$

Étape 6 : Pour chaque quantificateur existentiel $\exists x$ dans F, soit $y_1, \dots, y_n$ les variables universellement quantifiées précédant $\exists x$ et f un nouveau symbole de fonction d'arité n. On supprime alors $\exists x$ et on remplace chaque occurrence de x par $f(y_1, \dots, y_n)$.

ie : f est appelé fonction de Skolem

axiome du choix

Exemple : $\forall z \, ((p(a) \vee \neg p(b) \vee q(z)) \wedge (\neg q(a) \vee \neg p(b) \vee q(z)))$

2) Preuve de la propriété : Il est acquis que les cinq premières étapes préservent l'équivalence sémantique. Intéressons-nous donc au remplacement d'un quantificateur existentiel par une fonction de Skolem.

Soit $F = \forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \, G(y_1, \dots, y_n, x)$
Après l'application de l'étape 6 à $\exists x$, on a

$F' = \forall y_1 \ldots \forall y_n\, G(y_1, \ldots y_n, f(y_1 \ldots y_n))$

Supposons que F admet un modèle M.

Construisons M' un modèle pour F'. On va pour cela étendre le modèle M en ajoutant une interprétation pour f. à $\hat{M}$

Soit R_G un nouveau symbole de prédicat, interprété par $R_G(c_1, \ldots c_n, c_{n+1}) \in R_G^{M'}$ ssi $G(c_1, \ldots c_{n+1})$ est vrai dans M

Ainsi pour tout $c_1, \ldots c_n$ éléments du domaine. il existe un élément d du domaine tels que $(c_1, \ldots c_n, d) \in R_G$ (car M est un modèle de F)

On choisit arbitrairement l'un de ces éléments pour être la valeur de $f^{M'}(c_1, \ldots c_n)$

Et on a ainsi construit M', il reste à vérifier que c'est bien un modèle de F'.

Soit $c_1, \ldots c_n$ des éléments du domaine, par construction $f^{M'}(c_1, \ldots c_n)$ est un élément d du domaine tel que $G(c_1, \ldots c_n, d)$ est vraie dans M'.

comme les $c_1, \ldots c_n$ sont arbitraires, on a donc $\forall y_1 \ldots \forall y_n\, G(y_1, \ldots y_n, f(y_1 \ldots y_n))$ vraie dans M'.