917

Logique du 1er ordre : syntaxe et sémantique

La logique du 1er ordre étend le calcul propositionnel : les variables peuvent représenter tous les objets mathématiques, on introduit également les quantificateurs, fonctions et relations sur ces objets.

I. Syntaxe [DWR, CL1]

1) Signature, termes et formules

Déf. 1. Une signature $\mathcal{L}$ est la donnée d'une famille de symboles de trois sortes :

- un ensemble de symboles de variables $\mathcal{V}$.
- Un ensemble de symboles de constantes $\mathcal{C}$.
- Un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ (n : arité).
- un ensemble de symboles de relations (ou prédicats) $\mathcal{R} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}_n$.

(on peut aussi considérer les constantes comme des fonctions d'arité 0)

Ex. 2 : $\mathcal{L}_1 = \{\underbrace{x, y, z}_{\mathcal{V}}, \underbrace{e}_{\mathcal{C}}, \underbrace{*_2, {}^{-1}}_{\mathcal{F}}, \underbrace{=_2}_{\mathcal{R}}\}$

Déf. 3. L'ensemble des termes $\mathcal{T}$ est défini par $\mathcal{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_k$ avec $\mathcal{T}_0 = \mathcal{V} \cup \mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \{f(t_1 \dots t_k),\ t_i \in \mathcal{T}_k$ et $f \in \mathcal{F}_k\}$.

- Un terme clos est un terme ne contenant pas de variable.
- La hauteur d'un terme t est le plus petit entier k tel que $t \in \mathcal{T}_k$.
- La taille d'un terme t est le nombre de symboles de fonctions apparaissant dans t.

Déf. 4 : Les formules atomiques de $\mathcal{L}$ sont les éléments de la forme $R(t_1 .. t_n)$ où $R \in \mathcal{R}_n$ et $t_1 .. t_n \in \mathcal{T}$. On note Atom leur ensemble.

- L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules sur $\mathcal{L}$ est défini par la grammaire :

$$\mathcal{F} : \mathrm{Atom} \mid (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}) \mid \neg \mathcal{F} \mid \exists x\, \mathcal{F} \mid \forall x\, \mathcal{F} \quad \text{où } x \in \mathcal{V}$$

- La taille d'une formule est le nombre de connecteurs et de quantificateurs apparaissant dedans.

Ex. 5. Sur $\mathcal{L}_1$: $x * y^{-1} \in \mathcal{T}$, $\forall x \exists y\, ((x*y = e) \wedge \neg(y = x^{-1})) \in \mathcal{F}$

2) Variables libres, substitutions

Déf. 6 : Soit $F \in \mathcal{F}$. L'ensemble $VL(F)$ des variables libres de F est l'ensemble des variables dont au moins une occurrence n'est pas sous la portée d'un quantificateur.

- Une formule close est une formule sans variable libre.
- Si $F \in \mathcal{F}$ et $VL(F) = \{x_1 .. x_n\}$, la formule $\forall x_1 .. \forall x_n F$ est appelée clôture universelle de F.

Ex. 7 : $F = \forall x\, (x = y \wedge x = y^{-1})$. $VL(F) = \{y\}$.

Déf. 8 : Soit $F \in \mathcal{F}$, $x \in VL(F)$ et $t \in \mathcal{T}$. La formule $F[x := t]$ est celle obtenue en remplaçant dans F toutes les occurrences libres de x par t, après renommage éventuel des variables non libres de F qui apparaissent dans t.

Ex. 9 : $F = \neg(x = y)$, $t = z^{-1}$. $F[x := t] = \neg(z^{-1} = y)$.

II. Sémantique [DWR, CL1]

1) Interprétation

Déf. 10 : Soit $\mathcal{L}$ une signature. On appelle interprétation (ou modèle) de $\mathcal{L}$ un ensemble $\mathcal{M}$ comportant :

- Un ensemble non vide $|\mathcal{M}|$ appelé domaine de $\mathcal{M}$
- Pour chaque $x \in \mathcal{V}$, un élément $x_{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|$.

- pour chaque $c \in \mathcal{C}$, un élément $c_\mathcal{M}$ de $|\mathcal{M}|$
- pour chaque $f \in \mathcal{F}_n$, une fonction $f_\mathcal{M} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$.
- pour chaque $R \in \mathcal{R}_n$, un sous-ensemble $R_\mathcal{M}$ de $|\mathcal{M}|^n$

Ex. 11 : On peut interpréter $\mathcal{L}_1$ avec le modèle $\mathcal{M}_1$: $|\mathcal{M}_1| = \mathbb{N}$, $x_{\mathcal{M}_1}=2$, $y_{\mathcal{M}_1}=3$, $z_{\mathcal{M}_1}=5$, $e_{\mathcal{M}_1}=0$, $*_{\mathcal{M}_1} = +$ et ${}^{-1}_{\mathcal{M}_1} = n \mapsto n+5$.

Déf. 12 : Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de $\mathcal{L}$, $x \in \mathcal{V}$ et $a \in |\mathcal{M}|$. On note $\mathcal{M}[x:=a]$ l'interprétation $\mathcal{M}'$ telle que $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}|$, $c_{\mathcal{M}'} = c_\mathcal{M}$ pour $c \in \mathcal{C}$, $f_{\mathcal{M}'} = f_\mathcal{M}$ pour $f \in \mathcal{F}$, $R_{\mathcal{M}'} = R_\mathcal{M}$ pour $R \in \mathcal{R}$, $y_{\mathcal{M}'} = y_\mathcal{M}$ pour $y \in \mathcal{V}$ différent de x, et $x_{\mathcal{M}'} = a$.

Déf. 13, La valeur du terme t dans l'interprétation $\mathcal{M}$, notée $Val_\mathcal{M}(t)$ est définie par induction :

- $Val_\mathcal{M}(x) = x_\mathcal{M}$ pour $x \in \mathcal{V}$, $Val_\mathcal{M}(c) = c_\mathcal{M}$ pour $c \in \mathcal{C}$
- $Val_\mathcal{M}(f(t_1..t_n)) = f_\mathcal{M}(Val_\mathcal{M}(t_1), .., Val_\mathcal{M}(t_n))$ pour $f \in \mathcal{F}_n$

Ex. 14 : Dans l'interprétation $\mathcal{M}_1$, $Val_{\mathcal{M}_1}(x * y^{-1}) = 10$.

Déf. 15 : La valeur d'une formule $F \in \mathcal{F}$ dans l'interprétation $\mathcal{M}$ est un élément de $\{0,1\}$ noté $Val_\mathcal{M}(F)$ et défini par induction :

- $Val_\mathcal{M}(R(t_1..t_n)) = 1$ ssi $(Val_\mathcal{M}(t_1) .. Val_\mathcal{M}(t_n)) \in R_\mathcal{M}$
- $Val_\mathcal{M}(\neg F)$, $Val_\mathcal{M}(F_1 \wedge F_2)$, $Val_\mathcal{M}(F_1 \vee F_2)$, $Val_\mathcal{M}(F_1 \Rightarrow F_2)$: règles du calcul propositionnel
- $Val_\mathcal{M}(\forall x F) = 1$ ssi pour tout $a \in |\mathcal{M}|$, $Val_{\mathcal{M}[x:=a]}(F) = 1$.
- $Val_\mathcal{M}(\exists x F) = 1$ ssi il existe $a \in |\mathcal{M}|$, $Val_{\mathcal{M}[x:=a]} = 1$.

Ex. 16 : $F : z * y = y^{-1}$, $Val_{\mathcal{M}_1}(F) = 1$.

2) Satisfiabilité et équivalence

Déf. 17 - On dit que $\mathcal{M}$ satisfait F (ou F admet pour modèle $\mathcal{M}$) ssi $Val_\mathcal{M}(F) = 1$. On note $\mathcal{M} \models F$.
- On dit que F est **valide** ssi pour toute interprétation $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models F$.
- On dit que F et G sont équivalentes ssi $(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$ est **valide**. On note $F \equiv G$.

Ex. 18 : - Pour toutes formule F et G, $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$.
- Pour $F \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathcal{V}$, $\forall x F \equiv \neg(\exists x \neg F)$.

III. Formes normales [DNR]

Déf. 19 : Une formule F est dite sous forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 .. Q_n x_n G$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et G est sans quantificateur. Elle est dite sous forme conjonctive (resp. disjonctive) ssi G l'est.

Prop. 20 : Toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe conjonctive (resp. disjonctive).

Déf. 21 : Soit F sous forme prénexe. On lui associe une forme de Skolem notée F_{Sk} en supprimant les $\exists$ et en introduisant des symboles de fonctions supplémentaires.

Prop. 22 : F admet un modèle ssi F_{Sk} admet un modèle (DVPMT)

Ex. 23 : F : $\forall x \exists y \forall z (x * y = z)$ a pour forme de Skolem F_S : $\forall x \forall z (x * f(x) = z)$.

IV. Théories, démonstrations et grands théorèmes [DIVR]

<u>Déf. 24</u> : Une théorie T est un ensemble de formules closes, ses éléments sont appelés axiomes.

<u>Déf. 25</u> : - Une interprétation $\mathcal{M}$ satisfait T (on note $\mathcal{M} \models T$) ssi $\mathcal{M}$ satisfait toutes les formules de T. On dit que T est contradictoire ssi elle n'admet pas de modèle.

- Une formule close F est valide dans T (on note $T \models F$) ssi $T \cup \{\neg F\}$ est contradictoire.

<u>Déf. 26</u> : On dit que T prouve F (on note $T \vdash F$) ssi on peut déduire F à partir des axiomes de T et des règles de déduction naturelle. On dit aussi que F est un théorème de T.

- T est dite consistante ssi $T \nvdash \bot$. (on dit aussi cohérente)
- T est dite complète ssi T est consistante et pour toute formule close F, $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

<u>Th. 27</u> (complétude) : $T \vdash F$ ssi $T \models F$.

<u>Th. 28</u> : T est consistante ssi elle est non contradictoire.

<u>Th. 29</u> (compacité) : T est contradictoire ssi il existe un sous-ensemble fini de T contradictoire.

<u>Th. 30</u> (Löwenheim - Skolem) : Soit T une théorie sur un langage $\mathcal{L}$ au plus dénombrable. Si T possède un modèle infini, alors T possède un modèle dénombrable. (DVPMT)

V. Expressivité [CL1]

<u>Déf. 31</u> : Une propriété P sur les modèles est dite axiomatisable (resp. finiment axiomatisable) ssi il existe une théorie T (resp. une formule close F) telle que pour toute interprétation $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ vérifie P ssi $\mathcal{M} \models T$ (resp. $\mathcal{M} \models F$).

<u>Ex. 32</u> : - Pour $n \geq 1$, la propriété "être un ensemble à au moins n éléments" est finiment axiomatisable.
- La propriété "être un ensemble infini" est axiomatisable.
- La propriété "être un ensemble fini" n'est pas axiomatisable.

VI. Décidabilité [CL2, LAL]

<u>Déf. 33</u> : Une théorie T est dite récursive ssi l'ensemble de ses axiomes est récursif. Elle est dite décidable ssi l'ensemble Th(T) de ses théorèmes est récursif.

<u>Prop. 34</u> : Si T est récursive, Th(T) est récursivement énumérable.

<u>Prop. 35</u> : Si T est récursive et complète, alors elle est décidable.

<u>Prop. 36</u> : - Si $\mathcal{L}$ contient un symbole de relation binaire (en plus de =), la théorie vide (ou calcul des prédicats) est indécidable.
- Si $\mathcal{L}$ ne contient que des prédicats unaires et aucune fonction, le calcul des prédicats est décidable.

<u>Ex. 37</u> : - L'arithmétique de Peano est indécidable.
- L'arithmétique de Presburger est décidable.

Références :

[DNR] David-Nour-Raffalli : Introduction à la logique

[CL1] Cori-Lascar : Logique mathématique Tome 1

[CL2] Cori-Lascar. Logique mathématique ; Tome 2

[LAL] Lalement : Logique, réduction, résolution.