Défendre (dans la partie I) l'utilisation de la déduction naturelle.

Systèmes de déduction ⇒ base de la preuve de complétude.

plus orienté en validité.

917

Logique du premier ordre: Syntaxe et sémantique. 02/12/2014

Ref: "Intro à la logique" R. David, K. Nour, C. Raffalli.

I Syntaxe

① Construction

Les mots du langage du premier ordre sont formés à partir de:
- ▷ $\mathcal{V}$ un ensemble dénombrable de variable
- ▷ $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$ l'ensemble des connecteurs logiques
- ▷ $\{\forall, \exists\}$ les quantificateur universel et existentiel
- ▷ $\mathcal{F}_0$ un ensemble de symboles nommés constantes
- ▷ Un symbole $\perp$
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{R}_n$ des ensembles de symboles nommés fonctions et relations d'arité n.

exemple1: $\mathcal{V} = \{x, y\}$, $\mathcal{F}_0 = \{a, 1\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, $\mathcal{R}_2 = \{=\}$.

$\exists f \vee \forall x g =$, $\neg x \vee y$, gxy, $\forall y = gxaf1$ sont des mots du langage du premier ordre.

Def (terme): L'ensemble $\mathcal{T}$ des termes est défini par induction:
- $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{V} \subset \mathcal{T}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$
$$f t_1 \dots t_n \in \mathcal{T}$$

exemples2:
gxy est un terme, les autres exemples précédents non.

Def (formule): L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules est défini par induction:
- $\perp \in \mathcal{F}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathcal{R}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$
$$r t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}$$
- Pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$
$$\neg\varphi_1 \in \mathcal{F} \text{ et } \varphi_1 \oplus \varphi_2 \in \mathcal{F} \text{ pour tout } \oplus \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$$
$$\forall x \varphi_1 \in \mathcal{F} \text{ et } \exists x \varphi_1 \in \mathcal{F} \text{ pour tout } x \in \mathcal{V}$$

exemples3:
$\neg x \vee y$ et $\forall y = gxaf1$ sont des formules, les autres exemples non.

Def (variable libre): Soit F une formule. L'ensemble $VL(F)$ est défini inductivement par:
- si $F = \perp$, $VL(F) = \emptyset$
- si $F = r t_1 \dots t_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathcal{R}_n$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$
$VL(F)$ est l'ensemble des variables apparaissant dans F
- si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$ $VL(F) = VL(G)$
- si $F = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ et $\oplus \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$
$$VL(F) = VL(F_1) \cup VL(F_2).$$
- si $F = \forall x G$ ou $F = \exists x G$ avec $x \in \mathcal{V}$ et $G \in \mathcal{F}$
$$VL(F) = VL(G) \setminus \{x\}.$$

Si $VL(F) = \emptyset$ on dit que F est une formule close.

exemple4: $VL(\forall y = gxaf1) = \{x\}$.

Def (substitution) Soit F une formule, x une variable et t un terme. On note $F[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant les occurences libres de x par t.
Une substitution est licite lorsque les variables dans t restent libre dans $F[x := t]$.

exemple5:
$$\forall y = gxaf1[x := gx1] \text{ vaut } \forall y = ggx1af1$$
et est licite.

② Déduction naturelle.

On cherche, à partir d'un ensemble Γ de formules close prédéfinies appelé théorie, à déduire d'autres formules. Pour cela on utilise des règles de déduction. On note $\Gamma \vdash F$ pour dire que F se déduit de Γ.

Dans ces règles, lorsque la partie ~~supérieure~~ postérieure est vérifiée, alors on en déduit la partie inférieure :

- axiomes : $\dfrac{}{\Gamma, F \vdash F}\,ax$
- règles d'insertion et d'élimination : cf. annexe.
- règle de l'absurde : $\dfrac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\,abs$

<u>Def (consistance)</u> : Une théorie T est consistante si on ne peut pas déduire $\bot$

<u>exemple 6</u> : $T := \{\forall x\, rx, \exists x\, \neg rx\}$ n'est pas consistante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{T \vdash \forall x\, rx}\,ax}{T \vdash ra}\,ev \quad \dfrac{\dfrac{}{T \vdash \exists x\, \neg rx}\,ax}{T \vdash \neg ra}}{T \vdash \bot}$$

<u>Def (complet)</u> : Une théorie T est complète si elle est consistante et si pour toute formule F close $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$

Ex de théorie non complète.

$\boxed{\text{II}}$ Sémantique

<u>Def (Interpretation)</u> : Une interpretation (ou modèle) est un triplet $(\mathcal{M}, (\hat{\mathcal{F}}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\hat{\mathcal{R}}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ où
- $\mathcal{M}$ est un ensemble
- $\hat{\mathcal{F}}_n : \mathcal{F}_n \to (M^n \to M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\hat{\mathcal{R}}_n : \mathcal{R}_n \to M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On notera généralement $f_{\mathcal{M}}$ au lieu de $\hat{\mathcal{F}}_n(f)$ et $r_{\mathcal{M}}$ au lieu de $\hat{\mathcal{R}}_n(r)$.

<u>exemple 7</u> : En reprenant l'exemple 1 on peut choisir :
$\mathcal{M} = \mathbb{R}$, $a_{\mathcal{M}} = 1{,}3$, $1_{\mathcal{M}} = 0$, $f_{\mathcal{M}} = id$, $g_{\mathcal{M}} = (x,y) \mapsto x \times y$, $=_{\mathcal{M}} = \{(x,x) \mid x \in \mathcal{M}\}$

<u>Def (environnement)</u> : Soit $\mathcal{M}$ une interprétation.
Un environnement est une fonction $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{M}$
On défini $e[x := a]$ comme l'environnement e' tel que $e'(x) = a$ et $e'(y) = e(y)$ pour $y \in \mathcal{V} / \{x\}$.

<u>Def (valeur d'un terme)</u> : Soit e un environnement et $\mathcal{M}$ une interprétation. On définit inductivement la valeur d'un terme.

Pour $c \in \mathcal{F}_0$ $val_{\mathcal{M}}(c, e) = c_{\mathcal{M}}$, Pour $x \in \mathcal{V}$ $val_{\mathcal{M}}(x, e) = e(x)$,

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_n$ et $t_1 \ldots t_n \in \mathcal{T}$

$$val_{\mathcal{M}}(f t_1 \ldots t_n) = f_{\mathcal{M}}(val_{\mathcal{M}}(t_1, e), \ldots, val_{\mathcal{M}}(t_n, e))$$

<u>Def (valeur d'une formule)</u> : Soit e un environnement et $\mathcal{M}$ une interprétation. On définit inductivement la valeur d'une formule : (Pour des raison de clarté, nous ometons de définir les paramètres)

$val_{\mathcal{M}}(\bot, e) = 0$, $val_{\mathcal{M}}(r t_1 \ldots t_n) = 1$ ssi $(val_{\mathcal{M}}(t_1, e), \ldots, val_{\mathcal{M}}(t_n, e)) \in r_{\mathcal{M}}$

$val_{\mathcal{M}}(\neg G, e) = 1$ ssi $val_{\mathcal{M}}(G, e) = 0$
$val_{\mathcal{M}}(F \wedge G, e) = 1$ ssi $val_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$ et $val_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$
$val_{\mathcal{M}}(F \vee G, e) = 1$ ssi ———— ou ————
$val_{\mathcal{M}}(F \to G, e) = 1$ ssi ———— $= 0$ ou $val_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$
$val_{\mathcal{M}}(\forall x F, e) = 1$ ssi pour tout $a \in \mathcal{M}$ $val_{\mathcal{M}}(F, e[x := a]) = 1$
$val_{\mathcal{M}}(\exists x F, e) = 1$ ssi il existe $a \in \mathcal{M}$ tq ————

On notera $\mathcal{M}, e \models F$ pour $val_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$. Dans le cas des formules closes on notera simplement $\mathcal{M} \models F$, prononcé "$\mathcal{M}$ satisfait F" car la valeur ne dépend pas de e. De plus on notera $T \models F$ lorsque toute interprétation qui satisfait T satisfait aussi F.

<u>Def (théorème)</u> : Soit F une formule. F est un théorème si pour toute interprétation $\mathcal{M}$ et tout environnement e $\mathcal{M}, e \models F$

<u>Def (contradiction)</u> : Soit F une formule. F est une contradiction (ou F est contradictoire) s'il n'existe pas de modèle qui satisfasse F.

valide $\Rightarrow \exists$ preuve. Énumérer. Est-ce RE ? ~~Non~~ Oui ; mais pas récursif.

III Formes canoniques

Def (formules équivalentes) : Soit $F, G \in \mathcal{F}$

F et G sont équivalentes si $(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$ est un théorème.

① Formes prénexes

Def (formule prénexe) : Soit $F \in \mathcal{F}$. F est prénexe si elle est de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G$ avec, pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_i \in \mathcal{V}$ et G sans quantificateur.

Thm : Soit $F \in \mathcal{F}$. Il existe une formule prénexe équivalente à F.

② Skolemisation

Def (mise sous forme de Skolem) :

Soit $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G$ une formule prénexe.

La formule de Skolem F_S de F est obtenue en :

1. Rajoutant, pour chaque $Q_i = \exists$, une fonction f_i d'arité égale au nombre de $\forall$ à gauche de Q_i au langage.
2. Remplaçant les occurences de x_i par $f_i(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})$ où (x_{α_j}) sont les variables à gauche de x_i introduit par un $\forall$.

exemple 8 :

$F = \forall x \exists y \forall z \exists u \exists v \quad x = u \wedge z = y$

$F_S = \forall x \quad \forall z \qquad x = f_u(x,z) \wedge z = f_y(x)$

utile pour la forme clausale $\rightarrow$ **Thm :** Soit $F \in \mathcal{F}$ prénexe $\quad F_S \Rightarrow F$ est un théorème

Thm : Soit $F \in \mathcal{F}$ close prénexe.

F admet un modèle ssi F_S admet un modèle

IV De la syntaxe à la sémantique et réciproquement

Thm : Soit T une théorie.

T est non-contradictoire ssi T est consistant

Henkin

Corollaire : Soit T une théorie complète, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T et $F \in \mathcal{F}$ close.

$$\mathcal{M}_1 \models F \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}_2 \models F$$

Thm (de complétude) : Soit T une théorie et $F \in \mathcal{F}$ close.] DVP

$$T \models F \quad \text{ssi} \quad T \vdash F$$

V Limites de la logique du premier ordre

La logique du premier ordre permet d'exprimer des propriétés mathématiques. Par exemple la théorie des groupes est conséquence des seules formules ci-dessous, exprimées avec plus de liberté d'écriture :

$$\left.\begin{array}{lll} \forall xyz & (x * y) * z = x * (y * z) & \\ \forall x & x * e = x & \wedge \quad e * x = x \\ \forall x & x * inv(x) = e & \wedge \quad inv(x) * x = e \end{array}\right| \text{avec} \left| \begin{array}{l} e \in \mathcal{F}_0 \\ inv \in \mathcal{F}_1 \\ * \in \mathcal{F}_2 \\ = \in \mathcal{R}_2 \end{array}\right.$$

Malheureusement, le problème de savoir si une formule est satisfiable est indécidable

Thm (de compacité) : Soit T une théorie

T est contradictoire ssi il existe un sous-ensemble fini de T contradictoire.

Application (Lowenheim-Skolem) : Soit T une théorie $\leftarrow$ sur un langage au plus dénombrable.

Si T possède un modèle infini

Alors T possède un modèle dénombrable.] DVP

Application : "être un ensemble fini" n'est pas axiomatisable.

étape 1 : trouver une théorie T_n telle que $\mathcal{M} \models T_n$ ssi $\#\mathcal{M} = n$.

étape 2 : Par l'absurde on suppose avoir une théorie T telle que $\mathcal{M} \models T$ ssi $\#\mathcal{M} \in \mathbb{N}$.

On utilise le théorème de compacité pour obtenir une absurdité.

+ arithmétique de Presburger (DNR : élimination des quantificateurs)

$\Rightarrow$)([illegible]abilité.

Règles d'introduction et d'élimination :

$\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\wedge_e^d$$

$\vee$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\vee_e$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\Rightarrow_e$$

$\neg$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

$\exists$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x F}\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x F \quad \Gamma, F \vdash G \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma \text{ ni } G}{\Gamma \vdash G}\exists$$

$\forall$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad x \text{ pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x A}\forall_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x F}{\Gamma \vdash A[x := t]}\forall_e$$

Une implication de la complétude

<u>Thm:</u> Soit T une théorie et F une formule close.

$$\text{si } T \vdash F \text{ , alors } T \models F.$$

<u>lemme 1:</u> Soit $t, v \in \mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ un modèle, e un environnement. En posant $v = t[x := u]$ et $e' = e[x := val_{\mathcal{M}}(u,e)]$

$$val_{\mathcal{M}}(t,e') = val(v,e).$$

<u>démo:</u> induction sur t:

- $t \in \mathcal{F}_0$ $\quad val_{\mathcal{M}}(t,e') = t_{\mathcal{M}} = v_{\mathcal{M}} = val_{\mathcal{M}}(v,e)$ ‖ $t \in \mathcal{V} \setminus \{x\}$ idem ‖ $t = x$ $\quad val_{\mathcal{M}}(t,e') = val_{\mathcal{M}}(u,e) = val_{\mathcal{M}}(v,e)$.

- $t = f t_1 \ldots t_n$ $\quad val_{\mathcal{M}}(t,e') = f_{\mathcal{M}}(val_{\mathcal{M}}(t_1,e'), val_{\mathcal{M}}(t_2,e'), \ldots, val_{\mathcal{M}}(t_n,e'))$

$$= f_{\mathcal{M}}(val_{\mathcal{M}}(v_1,e), \ldots, val_{\mathcal{M}}(v_n,e)) \qquad \text{où } v_i = t_i[x := u]$$

$$= val_{\mathcal{M}}(f v_1 \ldots v_n, e)$$

$$= val_{\mathcal{M}}(v,e).$$

$\blacksquare$

<u>lemme 2:</u> Soit F une formule, t un terme, $\mathcal{M}$ un modèle et e un environnement.
En posant $e' = e[x := val_{\mathcal{M}}(t,e)]$

$$\mathcal{M}, e \models F[x := t] \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}, e' \models F$$

<u>démo:</u> induction sur F.

- $F = \bot$ $\quad \mathcal{M}, e \models \bot$ ssi $\mathcal{M}, e' \models \bot$

- $F = r t_1 \ldots t_n$ $\quad \mathcal{M}, e \models F[x := t]$ ssi $(val_{\mathcal{M}}(t_1[x := t], e), \ldots) \in r_{\mathcal{M}}$
  ssi $(val_{\mathcal{M}}(t_1, e'), \ldots) \in r_{\mathcal{M}}$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models f$.

- $F = F_1 \wedge F_2$ $\quad \mathcal{M}, e \models F[x := t]$ ssi $\mathcal{M}, e \models F_1[x := t]$ et $\mathcal{M}, e \models F_2[x := t]$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models F_1$ et $\mathcal{M}, e' \models F_2$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models F$

- $F = F_1 \vee F_2$ et $F = F_1 \Rightarrow F_2$ sont analogues.

- $F = \neg G$ $\quad \mathcal{M}, e \models F[x := t]$ ssi $\mathcal{M}, e \not\models G[x := t]$
  ssi $\mathcal{M}, e' \not\models G$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models F$

- $F = \exists y G$ $\quad \mathcal{M}, e \models F[x := t]$ ssi il existe $a \in \mathcal{M}$ tq $\mathcal{M}, e[y := a] \models G[x$
  ssi $\overline{\mathcal{M}, e'[y := a] \models G}$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models F$

- $F = \forall y G$ $\quad \mathcal{M}, e \models F[x := t]$ ssi pour tout $a \in \mathcal{M}$ $\mathcal{M}, e[y := a] \models G[x$
  ssi $\overline{\mathcal{M}, e'[y := a] \models G}$
  ssi $\mathcal{M}, e' \models F$

Lemme 3: Soit T une théorie, F une formule, $\mathcal{M}$ un modèle et e un environnem…

Si $T \vdash F$ et $\mathcal{M}, e \models T$ alors $\mathcal{M}, e \models F$

Démo Par induction sur l'arbre de preuve de $T \vdash F$.

- axiome: $\dfrac{}{T \vdash F}\,ax$ donc $F \in T$.
  Puisque $\mathcal{M}, e \models T$, on a $\mathcal{M}, e \models F$.
- règle de l'absurde.

$\dfrac{T, \neg F \vdash \bot}{T \vdash F}$ Par hypothèse d'induction si $\mathcal{M}, e \models \{T, \neg F\}$ alors $\mathcal{M}, e \models \bot$ ce qui est absurde.

donc $\mathcal{M}, e \not\models \{T, \neg F\}$.
or $\mathcal{M}, e \models T$
donc $\mathcal{M}, e \not\models \neg F$ i.e. $\mathcal{M}, e \models F$

- règles d'insertion de d'élimination.

- $\dfrac{T \vdash F_1 \quad T \vdash F_2}{T \vdash F}\,\wedge_i$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models F_1$ et $\mathcal{M}, e \models F_2$
  et donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T \vdash F \wedge G}{T \vdash F}\,\wedge_e^g$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models F$ et $\mathcal{M}, e \models G$

- $\dfrac{T \vdash G \wedge F}{T \vdash F}\,\wedge_e^d$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models G$ et $\mathcal{M}, e \models$

- $\dfrac{T \vdash F_1 \vee F_2 \quad T, F_1 \vdash F \quad T, F_2 \vdash F}{T \vdash F}\,\vee_e$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models F_1$ ou $\mathcal{M}, e \models F_2$
  donc $\mathcal{M}, e \models T, F_1$ ou $\mathcal{M}, e \models T, F_2$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$ ou $\mathcal{M}, e \models F$.

- $\dfrac{T \vdash F_1}{T \vdash F}\,\vee_i^g$ avec $F = F_1 \vee F_2$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models F_1$
  donc $\mathcal{M}, e \models F_1$ ou $\mathcal{M}, e \models F_2$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T \vdash F_2}{T \vdash F}\,\vee_i^d$ avec $F = F_1 \vee F_2$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models F_2$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T \vdash G \Rightarrow F \quad T \vdash G}{T \vdash F}\,\Rightarrow_e$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models G \Rightarrow F$ et $\mathcal{M}, e \models G$
  donc $(\mathcal{M}, e \not\models G$ ou $\mathcal{M} \models F)$ et $\mathcal{M}, e \models G$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T, F_1 \vdash F_2}{T \vdash F}$ avec $F = F_1 \Rightarrow F_2$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}, e \models T, F_1$
  donc $\mathcal{M}, e \not\models F_1$ ou $\mathcal{M}, e \models F_2$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$.

- $\dfrac{T, G \vdash \bot}{T \vdash F}\,\neg_i$ avec $F = \neg G$

  si $\mathcal{M}, e \models T, G$ alors $\mathcal{M}, e \models \bot$, absurde.
  donc $\mathcal{M}, e \not\models G$ et donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T \vdash G \quad T \vdash \neg G}{T \vdash F}\,\neg_e$ avec $F = \bot$

  si $\mathcal{M}, e \models T$ alors $\mathcal{M}, e \models G$ et $\mathcal{M}, e \models \neg G$
  ce qui est absurde.

- $\dfrac{T \vdash G[x := t]}{T \vdash F}\,\exists_i$ avec $F = \exists x G$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models G[x := t]$
  donc $\mathcal{M}, e[x := val(t, e)] \models G$
  donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $\dfrac{T \vdash \exists x G \quad T, G \vdash F \quad x \text{ non libre dans } T \text{ ni } F}{T \vdash F}$

  $\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models \exists x G$
  donc $\mathcal{M}, e[x := a] \models G$ avec $a \in \mathcal{M}$
  x n'étant pas libre dans T, $\mathcal{M}, e[x := a] \models T, G$
  donc $\mathcal{M}, e[x := a] \models F$
  x n'étant pas libre dans F
  $\mathcal{M}, e \models F$

$$\frac{T \vdash G \quad x \text{ non libre dans } T}{T \vdash \forall x G} \quad \text{avec } F = \forall x G.$$

$\mathcal{M}, e \models T$ donc, x étant non libre dans T, pour tout $a \in \mathcal{M}$ $\mathcal{M}, e[x := a] \models T$

donc $\mathcal{M}, e[x := a] \models G$ pour tout $a \in \mathcal{M}$.

donc $\mathcal{M}, e \models F$

- $$\frac{T \vdash \forall x G}{T \vdash G[x := t]} \quad \text{avec } F = G[x := t]$$

$\mathcal{M}, e \models T$ donc $\mathcal{M}, e \models \forall x G$

donc en particulier $\mathcal{M}, e[x := val(t, e)] \models G$

et donc $\mathcal{M}, e \models F$

Ex : Modèle : $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$
sous-modèle : $(2\mathbb{Z}, +, 0, 2)$
$\exists n, n+n=2$.
non élémentaire.

Théorème de Lowenheim-Skolem

Mathias Millet

December 2, 2014

On se place sur un langage $\mathcal{L}$.

Définition Soit $\mathcal{M}$ un modèle, un sous-modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est un modèle tel que

- $|\mathcal{N}| \subset |\mathcal{M}|$
- pour tout symbole de fonction f, $f_{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{M}}$
- pour tout symbole de relation R, $R_{\mathcal{N}} = R_{\mathcal{M}} \cap |\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|$

Définition Soient $\mathcal{M}$ un modèle, $\mathcal{N}$ un sous-modèle. $\mathcal{N}$ est un sous-modèle élémentaire si pour toute formule $F[x_1, ..., x_n]$, pour tous $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{N}|$, on a

$$\mathcal{M} \models F[a_1, ..., a_n] \text{ ssi } \mathcal{N} \models F[a_1, ..., a_n]$$

Définition Pour $A \subset |\mathcal{M}|$, on note $E(A)$ un plus petit ensemble satisfaisant: pour $F[x]$ une formule n+1 variables libres, pour $a_1, ..., a_n \in A$, si $\mathcal{M} \models \exists x F[a_1, ..., a_n, x]$, alors E(A) contient un élément de $\{y_F, \mathcal{M} \models F[a_1, ..., a_n, y_F]\}$ (qui est non vide par définition).

Théorème de Lowenheim-Skolem descendant (affaibli) Soit $\mathcal{M}$ un modèle, si $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable, alors $\mathcal{M}$ admet un sous-modèle élémentaire au plus dénombrable.

Preuve

1. On définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = \emptyset$, $X_{n+1} = X_n \cup E(X_n)$. Soit alors $\mathcal{N}$ le sous-modèle de $\mathcal{M}$ tel que $|\mathcal{N}| = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$

   (a) Montrons tout d'abord que ce nouveau modèle est correctement défini, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $(a_1, ..., a_n) \in N^n$, $f \in \mathcal{F}_n$, on a bien:

   $f(a_1, ..., a_n) \in |\mathcal{N}|$.
   C'est en fait immédiat, puisque, f étant partout définie, on a $\mathcal{M} \models \exists x f(a_1, ..., a_n) = x$. La suite $(X_n)_n$ étant croissante, il existe p tel que $a_1, ..., a_n \in X_p$. Par définition de $(X_n)_n$, l'élément $y = f(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{M}$ appartient alors à X_{p+1}, et donc à $|\mathcal{N}|$.

   Notons en particulier que les constantes sont dans X_1.

(b) $\mathcal{N}$ est au plus dénombrable. En effet, $\mathcal{L}$ étant au plus dénombrable, les variables, fonctions et relations sont aussi en quantité au plus dénombrable. L'ensemble des formules étant aussi dénombrable, chaque X_n est au plus dénombrable; leur réunion l'est aussi.

2. Montrons maintenant que $\mathcal{N}$ est un sous-modèle élémentaire de $\mathcal{M}$, c'est à dire que, pour $a_1, ...a_n \in |\mathcal{N}|$ on a bien: pour toute formule $F[x_1, ..., x_n]$,

   $\mathcal{M} \models F[a_1, ..., a_n]$ ssi $\mathcal{N} \models F[a_1, ..., a_n]$

   Tout d'abord, on a : pour tout terme $t[x_1, ..., x_n]$, $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(t[a_1, ..., a_n]) = \mathrm{Val}_{\mathcal{N}}(t[a_1, ..., a_n])$ (immédiat par induction sur les termes, $\mathcal{N}$ étant un sous-modèle de $\mathcal{M}$).

   Effectuons maintenant une induction sur les formules[1].

   Soit $F[x_1, .., x_n]$ une formule.

   (a) Cas de base : si $F[a_1, ..., a_n] = R(t_1[a_1, ..., a_n], ..., t_s[a_1, ..., a[n])$: immédiat, $\mathcal{N}$ étant un sous-modèle de $\mathcal{M}$

   (b) Cas des connecteurs propositionnels : immédiat par hypothèse d'induction.

   (c) Cas où $F[a_1, ..., a_n] = \forall y G[a_1, ..., a_n, y]$: on se ramène à $F = \neg\exists y \neg G$

   (d) Cas où $F[a_1, ..., a_n] = \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$:

   $\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{M} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$, alors, la suite $(X_n)_n)$ étant croissante, il existe p tel que, pour tout i, $a_i \in X_p$. Par construction des $(X_n)_n$, il existe donc $a_{n+1} \in X_{p+1} \subset |\mathcal{N}|$ tel que $\mathcal{M} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$. Par hypothèse d'induction, on obtient $\mathcal{N} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$. Enfin, la définition de la validité des formules donne : $\mathcal{N} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$

   $\Leftarrow$ Supposons $\mathcal{N} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$, alors il existe $a_{n+1} \in |\mathcal{N}|$ tel que $\mathcal{N} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$; par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$, et enfin $\mathcal{M} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$

   Si l'on voulait faire des preuves correctes, on ajouterait que ceci constitue bien une induction sur l'ensemble des formules. En effet, pour l'ordre sur les formules donné par $\varsigma(F)$ =(nombre de $\forall$ dans F, nombre de $\exists$ et de connecteurs logiques dans F), $\varsigma(F)$ décroit à chaque étape d'induction.

Corollaire Soit T une théorie sur un langage $\mathcal{L}$ au plus dénombrable. Si T possède un modèle infini, alors T possède un modèle au plus dénombrable.

Lemme complémentaire Si $\mathcal{M}$ est infini, le modèle $\mathcal{N}$ ainsi construit est en fait exactement dénombrable. En effet, la propriété " être un ensemble infini " étant axiomatisable, $\mathcal{M}$ a cette propriété si et seulement si $\mathcal{N}$ l'a.

Sources Cori-Lascar (tome 2)

[1]les cas d'induction commencent avec l'hypothèse, que l'on aurait pu préférer cacher sous le tapis : $\forall n, \forall a_1, ..., a_n in |\mathcal{N}|$