Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique

La logique du premier ordre fournit un formalisme efficace pour décrire entre autres les raisonnements mathématiques, et permet d'envisager des algorithmes de démonstration automatique.

I | Formules du premier ordre [DNR][CL]

Déf 1 : Un langage est un ensemble $L = C \sqcup (\bigsqcup_{n\geq 0} F_n) \sqcup (\bigsqcup_{n\geq 0} R_n)$ avec C un ensemble de symboles de constantes, F_n de fonctions d'arité n, R_n de relations d'arité n.

On appelle $\mathbb{V}$ un ensemble de symboles distincts de tous les symboles utilisés dans un langage : l'ensemble des variables.

Déf 2 : Un terme sur un langage L est un élément de l'ensemble T engendré par la grammaire G_T (infinitaire) suivante :

$$S \to x\ (x\in\mathbb{V}) \mid c\ (c\in C) \mid f(\underbrace{S,\dots,S}_{n})\ \ (f\in F_n,\ n\in\mathbb{N})$$

Déf 3 : Une formule atomique sur L est un élément de l'ensemble A engendré par la grammaire suivante :

$$S \to t_1 = t_2\ (t_1,t_2\in T) \mid r(t_1,\dots,t_n)\ (t_i\in T,\ r\in R_n,\ n\in\mathbb{N})$$

Déf 4 : Une formule sur L est un élément de l'ensemble $\mathcal{F}$ engendré par la grammaire $G_{\mathcal{F}}$ suivante :

$$S\to a\ (a\in A) \mid \neg S \mid (S\vee S) \mid (S\wedge S) \mid (\exists x\, S)\ (x\in\mathbb{V}) \mid (\forall x\, S)\ (x\in\mathbb{V}) \mid (S\to S)$$

Lemme 5 (lecture unique) : Les grammaires $G_{\mathcal{F}}$ et G_T sont non-ambiguës.

Ce lemme permet de faire des définitions et raisonnements inductifs sur les formules.

un ARBRE de dérivation

Déf 6 : La hauteur d'une formule est définie par :
pour toute $a\in A$, $h(a)=0$; $h(\neg\varphi)=h(\varphi)+1$;
$h(\varphi\vee\psi)=h(\varphi\wedge\psi)=h(\varphi\to\psi)=\max(h(\varphi),h(\psi))$; $h(\exists x\varphi)=h(\forall x\varphi)=h(\varphi)+1$.

Déf 7 : L'ensemble des variables libres d'une formule est définie par : $VL(a)=\{$variables apparaissant dans $a\}$;
$VL(\neg\varphi)=VL(\varphi)$; $VL(\varphi\vee\psi)=VL(\varphi\wedge\psi)=VL(\varphi)\cup VL(\psi)=VL(\varphi\to\psi)$
$VL(\exists x\varphi)=VL(\forall x\varphi)=VL(\varphi)\setminus\{x\}$
Une formule close est une formule φ telle que $VL(\varphi)=\emptyset$

Déf 8 : Une théorie T sur L est un ensemble de formules closes.
Une théorie T est dite récursive si l'ensemble T est récursif.

Exples 9 :
* Théorie de l'égalité : $L_= = \emptyset$ $T_= = \emptyset$, récursive.
* Théorie de l'ensemble infini $L = L_=$ $T_\infty = \{\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1\le i<j\le n} \neg x_i = x_j \ /\ n\in\mathbb{N}\}$
  T_∞ est récursive.
* Théorie de l'ordre dense linéaire $L_< = \{<\}$, [CK]
  $ODL = \{\forall x\, \neg x<x,\ \forall x\forall y(x<y \to \neg y<x),\ \forall x\forall y\forall z((x<y \wedge y<z) \to x<z),$
  $\forall x\forall y((x<y \vee x=y) \vee y<x),\ \forall x\forall y(x<y \to \exists z\,(x<z \wedge z<y))\}$
  ODL est récursive.
* Arithmétique de Peano $L_{PA} = \{0, S, +, \times\}$ [DNR] Chap 3
  On note $A_1 = \forall x\, \neg Sx = 0$; $A_2 = \forall x\, (x=0 \vee (\exists y\ x = Sy))$;
  $A_3 = \forall x\forall y\ (Sx = Sy \to x=y)$; $A_4 = \forall x\ x+0 = x$; $A_5 = \forall x\forall y\ x+Sy = S(x+y)$;
  $A_6 = \forall x\ x\times 0 = 0$; $A_7 = \forall x\forall y\ x\times Sy = x\times y + x$.
  Si φ est une formule sur L_{PA}, on note $Rec_{\varphi,x}$ la formule
  $Rec_{\varphi,x} = (\varphi[0/x] \wedge (\forall y\ (\varphi[y/x] \to \varphi[Sy/x]))) \to (\forall x\ \varphi)$ où l'on a noté $\varphi[t/x]$ pour $t\in T$ la formule obtenue en remplaçant les occurrences libres de x dans φ par le terme t.
  On note $\forall Rec_{\varphi,x}$ la formule $\forall x_1\forall x_2\dots\forall x_n\, Rec_{\varphi,x}$ avec $\{x_1,\dots,x_n\} = VL(Rec_{\varphi,x})$.
  $PA = \{A_i \,/\, 1\le i\le 7\} \cup \{\forall Rec_{\varphi,x} \,/\, x\in\mathbb{V},\ \varphi\in\mathcal{F}_{L_{PA}}\}$.
  PA est récursive.
* Arithmétique de Presburger $L_{Pres} = \{0, S, +\}$ [DNR] Chap 3
  On a $L_{Pres} \subset L_{PA}$, ~~donc~~ $A_1,\dots,A_5$ sont des formules sur L_{Pres}.
  On pose $Pres = \{A_i \,/\, 1\le i\le 5\} \cup \{\forall Rec_{\varphi,x} \,/\, x\in\mathbb{V},\ \varphi\in\mathcal{F}_{L_{Pres}}\}$
  Pres est récursive. On remarque que les formules $\varphi\in\mathcal{F}_{L_{Pres}}$ sont aussi des formules de $\mathcal{F}_{L_{PA}}$, mais que l'inverse n'est pas vrai.

II/ Sémantique [DNR] [CL]

<u>Déf 10</u>: Soit L un langage. Une <u>structure</u> $\mathcal{M}$ sur L est un ensemble $M \neq \emptyset$ et pour chaque $c \in C$, $f \in F_n$, $r \in R_n$, un élément $c^{\mathcal{M}} \in M$, une fonction n-aire $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$, et une relation n-aire $r^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

<u>Déf 11</u>: Pour une structure $\mathcal{M}$ sur L, une <u>valuation</u> est une fonction $\rho : V \to M$. Si $t \in T$, on définit l'<u>interprétation</u> de t relativement à ρ par induction : $[\![c]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}$; $[\![x]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \rho(x)$; $[\![f(t_1,\dots,t_n)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \dots, [\![t_n]\!]_\rho^{\mathcal{M}})$

<u>Déf 12</u>: Soient $\varphi \in \mathcal{F}$ une formule et $\mathcal{M}$ une structure sur L. Alors on définit l'<u>interprétation</u> de φ relativement à une valuation ρ par induction :
$[\![r(t_1,\dots,t_n)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1 \text{ si } ([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \dots, [\![t_n]\!]_\rho^{\mathcal{M}}) \in r^{\mathcal{M}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$; $[\![\varphi \vee \psi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1 \text{ si } [\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \text{ ou } [\![\psi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$;
de même pour les autres symboles booléens ; $[\![\exists x \varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1 \text{ si il existe } m \in M \text{ tel que } [\![\varphi]\!]_{\rho[x \mapsto m]}^{\mathcal{M}} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
$[\![\forall x \varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1 \text{ si pour tout } m \in M, [\![\varphi]\!]_{\rho[x \mapsto m]}^{\mathcal{M}} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$; $[\![t_1 = t_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1 \text{ si } [\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![t_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

<u>Rq 13</u>: Si φ est close, $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}}$ ne dépend pas de ρ : on note alors $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$.

<u>Déf 14</u>: Soit T une théorie, $\mathcal{M}$ une structure sur L. On dit que $\mathcal{M}$ est un <u>modèle</u> de T, $\mathcal{M} \models T$, si pour toute $\varphi \in T$, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Dans ce cas, on dit que T est <u>consistante</u>.
Si φ est close, on dit que φ est <u>conséquence</u> sémantique de T ($T \models^* \varphi$) si $\mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$.
T est <u>complète</u> si pour toute formule close φ, $T \models^* \varphi$ ou $T \models^* \neg\varphi$.
Si φ est close, φ est un <u>théorème</u> de T si $T \models^* \varphi$. On note $Thm(T)$ l'ensemble des théorèmes de T. On dit que T est <u>décidable</u> si $Thm(T)$ est récursif.

<u>Exples 15</u>: Les théories de l'exemple 9 sont consistantes : pour $T_=$ et T_∞, prendre un ensemble infini ; pour ODL, prendre $(\mathbb{Q}, <)$; pour PA et Pres, prendre $\mathbb{N}$.
T_∞ est complète, $T_=$ et ODL ne le sont pas (l'existence d'une borne sup n'est pas conséquence de ODL, par exemple). Nous verrons plus loin que PA est incomplète et indécidable, Pres est complète et décidable.

<u>Déf 16</u>: Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux structures sur L. Alors $\mathcal{N}$ est une <u>extension élémentaire</u> de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, si $M \subseteq N$ et pour toute formule $\varphi[x_1,\dots,x_n]$ à var. libres dans $\{x_1,\dots,x_n\}$, tout n-uplet $(m_1,\dots,m_n) \in M^n$, et toute valuation ρ telle que $\rho(x_i) = m_i$, on a $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{N}} = 1$.

<u>Thm 17</u>: (Löwenheim - Skolem descendant) [CL] [CK] Soit $\mathcal{M}$ une structure infinie sur un langage au plus dénombrable. Alors $\mathcal{M}$ a une sous-structure élémentaire dénombrable.

<u>Cor 18</u>: Une théorie sur un langage au plus dénombrable avec un modèle infini a un modèle dénombrable.

III/ Systèmes de déduction

1. <u>Le calcul des séquents</u> [DNR] Chap 5

<u>Déf 18</u>: Soit L un langage. Un <u>séquent</u> est une expression de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des multi-ensembles finis de formules sur L.

<u>Déf 19</u>: Les <u>règles de déduction</u> sont les expressions suivantes :

$$\dfrac{}{A \vdash A}\,ax \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,aff_g \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,aff_d \; ; \; \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,contr_g \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,contr_d \; ;$$

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}\,\wedge_d \; ; \; \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee_g \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vee_d \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,\to_g$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\to_d \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg_g \; ; \; \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg_d \; ; \; \dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\,\forall_g \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\,\forall_d \begin{pmatrix} x \notin VL(\Gamma) \\ x \notin VL(\Delta) \end{pmatrix}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\,\exists_g \begin{pmatrix} x \notin VL(\Gamma) \\ x \notin VL(\Delta) \end{pmatrix} ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\,\exists_d \; ; \; \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,cut$$

<u>Déf 20</u>: Un <u>arbre de déduction</u> est un arbre dont les noeuds sont des séquents, tel qu'un noeud et ses fils forment une règle de déduction, et les feuilles sont de la forme $A \vdash A$.
Un séquent est <u>prouvable</u> s'il est la racine d'un arbre de déduction.

<u>Exple 21</u>:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,ax}{A, B \vdash A}\,aff_g}{A \wedge B \vdash A}\,\wedge_g}{\neg A, A \wedge B \vdash}\,\neg_g}{\neg A \vdash \neg(A \wedge B)}\,\neg_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,ax}{A, B \vdash B}\,aff_g}{\begin{matrix} \vdots \\ \neg B \vdash \neg(A \wedge B) \end{matrix}}}{\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)}$$

<u>Thm 22</u>: (Complétude) Soit T une théorie sur L et F une formule. Alors il existe une partie finie $T_0 \subseteq T$ telle que $T_0 \vdash F$ si et seulement si $T \models^* F$.

<u>Thm 23</u>: (Élimination des coupures) Si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, alors il en existe un arbre de déduction qui n'utilise pas la règle cut.

<u>Cor 24</u>: (Propriété de la sous-formule) Si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, alors il en existe un arbre de déduction dont toutes les formules sont de la forme $A[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ avec A une formule apparaissant à une étape de la construction par induction d'une formule de Γ ou Δ.

<u>Rq 25</u>: Le thm 23 (et cor 24) a un intérêt dans le cadre de la recherche automatique de preuves.

<u>Cor 26</u>: Le séquent $\emptyset \vdash \emptyset$ n'est pas prouvable.

<u>Cor 27</u>: (Interpolation) Si $\vdash (A \to B)$ est prouvable, il existe une formule C ne contenant que des symboles apparaissant dans A <u>et</u> dans B telle que $\vdash A \to C$ et $\vdash C \to B$ sont prouvables.

2. Unification

Déf 28 : Une substitution est une fonction $\sigma : \mathbb{V} \to T$
On note $x \mapsto v$ la substitution $\sigma : \begin{cases} x \mapsto v \\ y \mapsto y \quad \text{si } y \neq x \end{cases}$
Pour $v \in T$, on note $v[\sigma]$ le terme obtenu en remplaçant chaque occurrence de x par $\sigma(x)$ dans v, et ce pour tout $x \in \mathbb{V}$

Déf 29 : Deux termes u et v sont dits unifiables s'il existe une substitution σ, appelée unificateur de u et v, telle que $u[\sigma] = v[\sigma]$

Thm 30 : Si u et v sont unifiables, alors il existe un unificateur, unique à permutation des variables près, tel que pour tout unificateur σ' de u et v, il existe une substitution σ'' telle que $\sigma' = \sigma'' \circ \sigma$; on note $\sigma = mgu(u,v)$

Rq 31 : Il existe un algorithme calculant pour deux termes u, v, $mgu(u,v)$ si ils sont unifiables, "échec" sinon ; il sert de base au langage de programmation prolog.

3. Skolémisation, simplification

Thm 32 : Soit F une formule sur un langage $\mathcal{L}$. Il existe un langage $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \sqcup \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ ensemble de symboles de fonctions, et une formule $\tilde{F}$ sur $\tilde{\mathcal{L}}$ telle que F admet un $\mathcal{L}$-modèle ssi $\tilde{F}$ admet un $\tilde{\mathcal{L}}$-modèle avec de plus $\tilde{F}$ sous la forme $\bigwedge_i \forall v_1 \forall v_2 \dots \forall v_{n_i} (A_{i1} \vee \dots \vee A_{ik_i} \vee \neg B_{i1} \vee \dots \vee \neg B_{il_i})$
$A_{i1}, \dots, A_{ik}, B_{i1}, \dots, B_{il}$ étant des formules atomiques de variables libres dans $\{v_1, \dots, v_n\}$

déf 33 : une formule sous la forme $(A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_l)$ est appelée clause

4. Résolution

Déf 34 : Soient C_0, C_1, C_2 des clauses, $C_i = (A_{i1} \vee \dots \vee A_{ik_i} \vee \neg B_{i1} \vee \dots \vee \neg B_{il_i})$
C_0 est une résolution de C_1 et C_2 si $VL(C_1) \cap VL(C_2)$ et qu'il existe :
$X \subset [\![1, l_1]\!]$, $Y \subset [\![1, k_2]\!]$, σ substitution telle que σ soit unificateur de $\{B_{1i}, i \in X\}$ et $\{A_{2j}, j \in Y\}$, et telle que
$C_0 = \left(\bigvee_{1 \le i \le k_1} \sigma(A_{1i})\right) \vee \left(\bigvee_{j \notin Y} \sigma(A_{2j})\right) \vee \left(\bigvee_{k \notin X} \neg\sigma(B_{1k})\right) \vee \left(\bigvee_{1 \le e \le l_2} \neg\sigma(B_{2e})\right)$
Une preuve par résolution de C à partir de Γ est un arbre dont la racine est C, les feuilles sont dans Γ et chaque nœud est une résolution de ses fils

Thm 35 : la déduction par résolution est complète

IV / Interactions entre syntaxe et sémantique

Thm 36 : (Compacité) Soit T une théorie. Alors T est consistante si et seulement si toute partie finie de T est consistante. [CL][CK][DNR]

Cor 37 : Si une théorie a des modèles de taille finie arbitrairement grande, alors elle a un modèle infini.

Cor 38 : Dans le langage $L_=$, il n'existe pas de théorie finie dont les modèles sont les ensembles infinis.

Rq 39 : Ces deux corollaires sont des limitations du pouvoir expressif de la logique du premier ordre. Si on voit une théorie comme une "axiomatisation" d'une propriété, on peut les interpréter par : la finitude n'est pas axiomatisable ; et le fait d'être infini n'est pas finiment axiomatisable.

← DÉVELOPPEMENT [CK][P]

Thm 40 : (Löwenheim-Skolem ascendant) : Si $\mathcal{M}$ est une structure infinie sur L, alors $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire non-dénombrable

Cor 41 : Si T a un modèle infini, alors elle a un modèle non-dénomb.

Rq 42 : Ce dernier corollaire dit que la dénombrabilité n'est pas axiomatisable. [CL][DNR]

(ADMIS)

Thm 43 : (Incomplétude de Gödel) Soit L un langage étendant L_{PA}, et T une théorie consistante contenant PA. Alors T est indécidable. Si T est de plus récursive, elle n'est pas complète.

Cor 44 : La théorie PA n'est ni complète, ni décidable.

Exple 45 : On peut démontrer que la théorie Pres est décidable en démontrant que toute formule F est équivalente à une formule $\bar{F}$ sans quantificateurs (i.e. $Pres \models^* (F \to \bar{F}) \wedge (\bar{F} \wedge F)$), et qu'on peut construire $\bar{F}$ algorithmiquement. [DNR]
Avec une méthode similaire, on peut démontrer la décidabilité de ODL. [CK]

David Nour Raffali

Cori Lascar

Chang Keisler

Poizat "Cours de théorie des modèles"

→ ~~Une formule vraie~~

≡ "vrai ds tt modèle de la théorie".

Questions

→ ≠ce modèle - structure

Plan assez riche → ne pas tout mettre

↳ on pourrait parler de prolog.

Développements possibles :

- Lowenheim Skolem descendant (classique)
- décidabilité - arithmétique de Presburger
- + autre preuve - cf. DNR.
- Présentation du langage prolog.
- Méthode de résolution?

[Chang-Keisler] [Poizat 4.10] 1

POINTU

!!

DANGER

THÉORÈME DE LÖWENHEIM-SKOLEM ASCENDANT

Soit L un langage égalitaire du premier ordre, avec C, F et R les ensembles de constantes, fonctions, et relations (d'arité ≥ 1) de L. Toutes les structures sont supposées égalitaires.

<u>Déf</u> : Soient $\mathcal{M} = (M, \{c^{\mathcal{M}} / c \in C\}, \{f^{\mathcal{M}} / f \in F\}, \{r^{\mathcal{M}} / r \in R\})$ et $\mathcal{N} = (N, \ldots)$ deux structures sur L. On dit que $\mathcal{N}$ est une <u>extension élémentaire</u> de $\mathcal{M}$ (et $\mathcal{M}$ une <u>sous-structure élémentaire</u> de $\mathcal{N}$), noté $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, si $M \subset N$ et pour toute formule $F[x_1, \ldots, x_n]$ de L à variables libres dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$, tout n-uplet $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$ et toute valuation $\rho[x_i \mapsto m_i, 1 \leq i \leq n] : V \to M$, on a $[\![F]\!]^{\mathcal{M}}_\rho = 1 \Leftrightarrow [\![F]\!]^{\mathcal{N}}_\rho = 1$.

<u>Théorème</u> (Lowenheim-Skolem ascendant) : Si $\mathcal{M}$ est une structure infinie sur L, alors $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire non-dénombrable.

On commence par un lemme permettant de trouver des extensions élémentaires de $\mathcal{M}$.

<u>Déf</u> : Soit $L_{\mathcal{M}}$ le langage L dans lequel on a remplacé C par $C \sqcup \{c_m / m \in M\}$, et $\overline{\mathcal{M}}$ la structure $\mathcal{M}$ avec en plus $c_m^{\overline{\mathcal{M}}} = m$. Le <u>diagramme élémentaire</u> de $\mathcal{M}$ est la théorie $\Delta(\mathcal{M}) = \{F \text{ close sur } L_{\mathcal{M}} / \overline{\mathcal{M}} \models F\}$.

<u>Lemme</u> : Tout modèle $\overline{\mathcal{N}}$ de $\Delta(\mathcal{M})$ tel que $c_m^{\overline{\mathcal{N}}} = m$ induit une structure $\mathcal{N}$ sur L en oubliant les interprétations $c_m^{\overline{\mathcal{N}}} = m$, et $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

<u>Dém</u> (lemme) : La structure $\mathcal{N}$ est clairement bien définie, et on a $M \subseteq N$.
Soient $F[x_1, \ldots, x_n]$ formule sur L, $(m_1, \ldots, m_n) \in M^k$, et $\rho[x_i \mapsto m_i, 1 \leq i \leq n] : V \to M$. Notons $\overline{F} = F[c_{m_i} / x_i, 1 \leq i \leq n]$.
Alors $\overline{F}$ est close sur $L_{\mathcal{M}}$, et on a $\overline{\mathcal{M}} \models \overline{F} \Leftrightarrow [\![F]\!]^{\mathcal{M}}_\rho = 1$, et $\overline{\mathcal{N}} \models \overline{F} \Leftrightarrow [\![F]\!]^{\mathcal{N}}_\rho = 1$. Par conséquent, on a :
$[\![F]\!]^{\mathcal{M}}_\rho = 1 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}} \models \overline{F} \Leftrightarrow \overline{F} \in \Delta(\mathcal{M}) \underset{\text{car } \overline{\mathcal{N}} \models \Delta(\mathcal{M})}{\Leftrightarrow} \overline{\mathcal{N}} \models \overline{F} \Leftrightarrow [\![F]\!]^{\mathcal{N}}_\rho = 1$,
d'où $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

<u>Dém</u> (théorème) : On va construire par compacité un modèle non-dénombrable de $\Delta(\mathcal{M})$, ce qui est suffisant d'après le lemme. Soit I un ensemble non-dénombrable, et $\{c_i / i \in I\}$ des nouveaux symboles de constante.
Soient $L_{\mathcal{M}}^+$ le langage $L_{\mathcal{M}}$ enrichi de ces symboles, et $\Delta(\mathcal{M})^+ = \Delta(\mathcal{M}) \cup \{\neg(c_i = c_j) / i, j \in I, i \neq j\}$ sur $L_{\mathcal{M}}^+$.
Soit Δ_0 une partie finie de $\Delta(\mathcal{M})^+$. Les formules de Δ_0 ne font apparaître qu'un nombre fini de c_i pour $i \in I$, disons $c_1, \ldots, c_n$.
Considérons la structure $\overline{\mathcal{M}}^+$ sur $L_{\mathcal{M}}^+$ obtenue à partir de $\overline{\mathcal{M}}$ avec les $c_1^{\overline{\mathcal{M}}^+}, \ldots, c_n^{\overline{\mathcal{M}}^+}$ deux à deux distincts (ce qui est possible puisque M est infini), et les $c_i^{\overline{\mathcal{M}}^+}$ pour $i \neq 1, \ldots, n$ valant n'importe quel élément de M.
Alors $\overline{\mathcal{M}}^+$ est par construction modèle de $\Delta(\mathcal{M})$ et de $\{\neg(c_i = c_j) / 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$, donc de Δ_0 qui est consistante.
Par compacité $\Delta(\mathcal{M})^+$ est consistante, et a un modèle $\overline{\mathcal{N}}^+$, qui est forcément non dénombrable.

La structure $\mathcal{N}$ sur $L_{\mathcal{M}}$ obtenue en oubliant les interprétations des c_i pour $i \in I$ est donc un modèle non-dénombrable de $\Delta(\mathcal{M})$, ce qui conclut la démonstration.

Remarques :

- Si $\mathcal{M} \models T$ pour une théorie T, alors $T \subseteq \Delta(\mathcal{M})$, et le théorème a comme corollaire qu'une théorie ayant un modèle infini a un modèle non-dénombrable.
On peut le démontrer directement par compacité, mais c'est un peu court pour un développement.
- Ceci m'amène au problème des références : dans les livres de logique non-orientés "théorie des modèles", c'est le corollaire qui est en général démontré (cf [Cori-Lascar], par exemple) ; dans ceux de théorie des modèles, c'est plutôt le théorème, mais en général de manière nettement moins détaillée, et en ajoutant des considérations de cardinaux (il y a des sous-structures/extensions élémentaires en tous les cardinaux supérieurs à celui de T). Ca rend l'extraction d'une démonstration propre assez difficile. En prime, le seul bouquin disponible que j'ai pu trouver est le [Chang-Keisler] à l'IRMAR, et il le fait <u>vraiment</u> rapidement.
Bref, ce brave développement, je conseillerais de le connaître par cœur si vous voulez le faire. (L'avantage, c'est qu'il est joli et original, même si pas facile quand on a pas un peu l'habitude.)

- Bien sûr, il y a une version "descendante" du théorème : toute structure infinie sur un langage dénombrable admet une sous-structure élémentaire dénombrable. Ça, c'est un développement très classique, sans doute plus facile, et avec des sources bibliographiques tout le tour du ventre. C'est un peu plus élémentaire que celui-ci (dans le sens où on n'utilise pas la compacité, on construit un modèle pas à pas, et au bout d'un nombre dénombrable de pas, on a un modèle dénombrable).

- A propos des extensions élémentaires : on dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes si elle satisfont les mêmes formules closes (on note $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$). On a alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, mais la réciproque est fausse : sur $L = \{+, =\}$ considérer $M = 2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$, avec les interprétations évidentes, et $F[x] =$ "$\exists y,\ y+y=x$" évaluée en 2. On a bien $M \subset N$, avec les interprétations des symboles de L préservées de M à N, mais $M \equiv N$ et $M \not\preceq N$.
Tout ça pour dire que l'extension élémentaire est la "bonne" notion d'extension en théorie des modèles, et que c'est une condition assez forte.