920

Réécriture et formes normales. Exemples.

La réécriture est la théorie de la simplification qui sert notamment en :
- sémantique
- théorie de l'égalité
- démonstration automatique

<u>exemple 1</u> : les entiers et l'addition
- $x+0=x$
- $x+s(y)=s(x+y)$

$s(0)+s(s(0)) = s(s(0)+s(0)) = s(s(s(0)+0)) = s(s(s(0)))$

ceci montre que $1+2=3$.

<u>exemple 2</u> : les groupes : $*$ loi de groupe, e élément neutre pour $*$, $\bar{x}$ l'inverse de x :

$$\left.\begin{array}{l} x*e=x \\ x*\bar{x}=e \\ (x*y)*z = x*(y*z) \end{array}\right\} \text{exemple de règle de réécriture en théorie des groupes}$$

I] Systèmes de réécriture

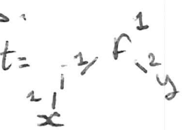
1) Termes

<u>Def I.1</u> : Une signature Σ est un ensemble de symboles de fonctions $\Sigma = \bigcup_{n\geq 0} \Sigma^{(n)}$ où $\Sigma^{(n)}$ est l'ensemble des symboles de fonctions d'arité n ($\Sigma^{(0)}$ est l'ensemble des symboles de constantes)

<u>Def I.2</u> : Les termes $T(\Sigma,\mathcal{X})$ sont définis inductivement sur $(\Sigma \cup \mathcal{X} \cup \{(,),;\})^*$ par : $\mathcal{X} \subseteq T(\Sigma,\mathcal{X})$ et, pour $n \geq 0$, $f \in \Sigma^{(n)}$, $t_1,\dots,t_n \in T(\Sigma,\mathcal{X})$ alors $f(t_1,\dots,t_n) \in T(\Sigma,\mathcal{X})$.

<u>Rq 1</u> : les termes $T(\Sigma,\mathcal{X})$ peuvent être vus comme des arbres dont les noeuds internes sont étiquetés par $\Sigma \setminus \Sigma^{(0)}$ et les feuilles par $\mathcal{X} \cup \Sigma^{(0)}$

<u>Rq 2</u> : On hérite alors de tout le langage des positions d'un terme, sous-terme, taille d'un terme par analogie au vocabulaire des arbres.

<u>exemple 3</u> : $t = f(i(x),y) \rightsquigarrow t =$ 

$i(x)$ est un sous terme de t.

x est en position 111

y est en position 12

<u>Notations</u> :
- $Pos(t)$ est l'ensemble des positions du terme t
- $|t|$ est la taille de t
- $t_{/p}$ est le sous terme de t à la position p
- $t[s]_p$ est le terme obtenu en remplaçant $t_{/p}$ par s dans t.

<u>Def I.3</u> : Une substitution $\sigma : \mathcal{X} \to T(\Sigma,\mathcal{X})$ est une fonction telle que $\sigma(x) \neq x$ pour un nombre fini d'éléments de $\mathcal{X}$. On étend ensuite σ à $T(\Sigma,\mathcal{X})$ par induction.

2) Systèmes de réécriture

<u>Def I.4</u> : Une théorie équationnelle E est un ensemble d'identités $l \simeq r$ où l et r sont des termes.

<u>exemple 4</u> : $E_1 = \{ f(x,y) \simeq g(i(x),i(y)),\ g(x,e) \simeq x,\ i(z) \simeq z,\ i(e) \simeq e \}$

<u>Def I.5</u> : Une règle de réécriture est une identité $l \simeq r$ telle que toutes les variables présentent dans r le sont dans l. On écrit $l \to r$.

<u>Def I.6</u> : Un système de réécriture est un ensemble de règles de réécriture

<u>Rq 3</u> : Un système de réécriture peut-être obtenu à partir d'un système équationnel en "orientant" les égalités si cela est possible.

<u>Rq 4</u> : Une règle de réécriture peut être appliquée à n'importe quel niveau du terme et pas uniquement à la racine

<u>exemple 5</u> : $g(f(x,e),e) \to f(x,e) \to g(i(x),i(e)) \to g(x,i(e))$

$\to g(x,e) \to x$

on a montré $g(f(x,e),e) \simeq x$ par rapport à la théorie E

<u>Prop I.7</u> : $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est la plus petite relation d'équivalence $\sim$ sur $T(\Sigma,\mathcal{X})$ vérifiant : $[(\forall i \in \{1,\dots,n\}\ t_i \sim u_i) \Rightarrow (f(t_1,\dots,t_n) \sim f(u_1,\dots,u_n))]$ et pour toute substitution σ, et toutes règle $l \to r$ de R le système de réécriture, $\sigma(l) \sim \sigma(r)$.

II) Propriétés des systèmes de réécriture (SR) et formes normales.

1) Definitions.

<u>Def II.1</u> : On dit que t est réductible s'il existe s tel que $t \xrightarrow[R]{} s$, sinon on dit que t est une forme normale

<u>exemple 6</u> : Les entiers : Un calcul sans division par 0 : est réductible. Les entiers sont les formes normales :

$(3+5)\cdot(1+2) \to 8\cdot(1+2) \to 8\cdot 3 \to 24$.

24 est une forme normale

<u>Def II.2</u> : On dit que s est une forme normale de t si s est une forme normale et $t \xrightarrow[R]{*} s$ où $\xrightarrow[R]{*}$ est la clôture réflexive transitive de $\to_R$.

<u>exemple 6(bis)</u> : 24 est une forme normale de $(3+5)\cdot(1+2)$

<u>Notation</u> : Si t admet une unique forme normale (FN), on la note $t\downarrow_R$.

<u>Def II.3</u> : On dit que t_1 et t_2 sont joignables s'il existe s tel que $t_1 \xrightarrow[R]{*} s \xleftarrow[R]{*} t_2$. On note alors $t_1 \downarrow t_2$

<u>exemple 7</u> : Pour $n > 1$, $n \to n'$ avec $n' = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 3n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1 est ici l'unique forme normale sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$

<u>exemple 8</u> : $\Sigma = \Sigma^{(0)} = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $R = \{m \to n \mid m > n \wedge n \mid m\}$

Les formes normales sont les nombres premiers, et $m \downarrow n$ ssi m et n ne sont pas premiers entre eux.

$10 \to 2$; $10 \to 5$ sont des règles valides, 2 et 5 sont deux formes normales de 10.

<u>Def II.4</u> : On dit qu'un système de réécriture est :

- <u>confluent</u> si $\forall x, y, z \in T(\Sigma, X)$, $\left[\left(y \xleftarrow[R]{*} x \xrightarrow[R]{*} z\right) \Rightarrow \left(\exists w \; y \xrightarrow[R]{*} w \xleftarrow[R]{*} z\right)\right]$

ie : $\left(x \xrightarrow[R]{*} y \wedge x \xrightarrow[R]{*} z\right) \Rightarrow (y \downarrow z)$

- <u>localement confluent</u> si $\forall x, y, z \in T(\Sigma, X)$, $\left(y \xleftarrow[R]{} x \to z\right) \Rightarrow \left(\exists w \; y \to w \leftarrow z\right)$

ie : $(x \to y \wedge x \to z) \Rightarrow (y \downarrow z)$

<u>exemple 8(bis)</u> l'exemple 8 n'est pas confluent, ni localement confluent

(Notation Diagramme : cf annexe 1.)

- <u>terminant ou noethérien</u> si il n'existe pas de suite infinie $x_0 \xrightarrow[R]{} x_1 \xrightarrow[R]{} \cdots x_n \to x_{n+1} \to \cdots$
- <u>convergent</u> s'il est terminant et confluent
- <u>normalisant</u> si tout élément a une forme normale

2) Proposition

On dit qu'un SR a la propriété de Church-Rosser si $y \xleftrightarrow[R]{*} z \Rightarrow y \downarrow_R z$.

<u>Prop II.5</u> : Un SR est confluent ssi il a la propriété de Church-Rosser.

<u>Prop II.6</u> : Si un SR est confluent, chaque terme a au plus une forme normale.

<u>Prop II.7</u> : Si un SR est confluent et normalisant, chaque terme a une unique forme normale.

<u>Prop II.8</u> : Si un SR est confluent et normalisant alors $\left(x \xleftrightarrow{*} y\right) \Leftrightarrow (x\downarrow = y\downarrow)$

<u>Lemme II.9</u> [Newman] Si un SR termine alors la confluence locale et la confluence sont équivalente.

<u>exemple 9</u> : Contre exemple du lemme : cf annexe 2

<u>Thm II.10</u> [Birkhoff] $s \simeq_R t \Leftrightarrow s \xleftrightarrow[R]{*} t$

<u>Rq 5</u> : Ce théorème de complétude fait le lien entre syntaxe et sémantique : si un SR est terminant et confluent, on peut décider $s \xleftrightarrow[R]{*} t$ en testant $s\downarrow_R = t\downarrow_R$

III) Prouver la terminaison et la confluence

1) Ordre de réduction et terminaison

Dev 1

Thm III.1 : Soit R un SR, il est indécidable de savoir si R est terminant

Prop III.2 : Si R est un système de réécriture tel que pour toute règle $l \to_R r$, r soit un terme clos alors la terminaison de R est décidable.

Def III.3 : Un ordre de réduction $<$ est ordre strict :
- bien fondé (pas de suite infinie décroissantes)
- compatible avec les opérations
- clos par substitutions.

exemple 10 : $s \succ t$ ssi $|s| > t$ et $\forall x \in \mathcal{X}\ |s|_x \geq |t|_x$ est un ordre de réduction.

Thm III.4 : Soit R un SR. R est terminant ssi il ~~admet~~ existe un ordre de réduction $\succ$ tel que pour toute règle $l \to r$ de R, $l \succ r$.

exemple 11 : $R = \begin{cases} g(i(x), i(y)) \to f(x,y) \\ g(x,e) \to x \\ i(z) \to z \end{cases}$

R admet l'ordre de réduction de l'exemple 10
On peut donc appliquer le Thm III.4 : R termine.

2) Confluence et Paires Critiques.

Thm III.5 : Soit R un SR, il est indécidable de savoir si R est confluent.

Par le ~~Lemme~~ de Newman, si R est terminant, il suffit de tester la locale confluence.

Def III.6 : Soient $l_1 \to_R r_1$ et $l_2 \to_R r_2$ deux règles de R
Soit $p \in Pos(l_1)$ telle que $l_1|_p \notin \mathcal{X}$ et tel que $l_1|_p$ et l_2 soient unifiables : ils admettent un unificateur le plus général σ alors $\langle \sigma(r_1), \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]_p \rangle$ est appelée une paire critique de R. (cf annexe B)

exemple 12 : (1) $f(f(x,y),z) \to f(x, f(y,z))$ (2) $f(i(x_1),x_1) \to e$

on a $\sigma = \{x \mapsto i(x_1),\ y \mapsto x_1\}$ pour

$$f(f(i(x_1), x_1), z)$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$f(i(x_1), f(x_1, z)) \qquad f(e,z)$$ ← Paire critique

Prop III.7 [Lemme des Paires critiques]
Un SR définit une relation de réduction localement confluente ssi ses paires critiques sont joignables.

Rq 6 : Pour tester si $\langle t_1, t_2 \rangle$ sont joignables, il suffit de tester si $t_1\downarrow_R = t_2\downarrow_R \Leftrightarrow t_1 \downarrow_R t_2$.

Si $\langle t_1, t_2 \rangle$ ne sont pas joignables, il suffit d'ajouter $t_1\downarrow_R \to t_2\downarrow_R$ ou $t_2\downarrow_R \to t_1\downarrow_R$ pour qu'ils le deviennent.

On en déduit la procédure de KNUTH-BENDIX qui permet, étant donné un système équationnel E et un ordre de réduction $<$, retourne un système de réécriture fini, équivalent et convergent.

Entrée : E un SR fini et $<$ un ordre de réduction.

Sortie : Echec ou R équivalent à E, fini et convergent

Init : Si ($\exists s =_R t$ tel que $s \not\succ t$ et $t \not\succ s$) alors Echec
Sinon $i \leftarrow 0$; $R_0 := \{l \to r \in E \cup E^{-1} \mid l \succ r\}$

Itération : $R_{i+1} := R_i$, Pour toute paires critiques $\langle s,t \rangle$ de R_i, Soit $\hat{s}$ une FN de s et $\hat{t}$ une FN de t
si ($\hat{s} \neq \hat{t}$) et $\hat{s} \not\succ \hat{t}$ et $\hat{t} \not\succ \hat{s}$ alors Echec
Sinon $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\hat{s} \to \hat{t} \mid \hat{s} \succ \hat{t}\} \cup \{\hat{t} \to \hat{s} \mid \hat{t} \succ \hat{s}\}$
$i \leftarrow (i+1)$

Jusqu'à $R_{i+1} = R_i$

Rq 7 : Cette procédure peut ne jamais terminer !

exemple 13 : Application de la procédure pour $E = \{(x*y)*(y*z) = z\}$

DEV2