Théories et modèles en logique du premier ordre, exemples.

924

27/03 2015

Prérequis : notions de syntaxe / sémantique en logique du premier ordre, connaissance d'un système de déduction (NK)

I Introduction et rappels

- Syntaxe

[C-L] 137 On notera $F(x_1,\dots,x_n)$ lorsque la formule F a pour seules variables libres $x_1,\dots,x_n$. La substitution sera notée $F(t_1/x_1,\dots,t_n/x_n)$

On notera abusivement ~~le~~ langage comme l'ensemble de ses fonctions et ~~prédicats~~, sauf le ~~prédicat~~ $=$: tous les langages seront égalitaires

exemple : $L_G = \{e, \cdot\}$ langage des groupes

- Sémantique

Toutes les L-structures considérées seront des réalisations égalitaires de L. Soit M une L-structure, $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$

$F = R(x_1,\dots,x_n)$ atomique est satisfaite par $(a_1,\dots,a_n)$ lorsque $(a_1,\dots,a_n) \in \overline{R}^{\mathcal{M}}$: on dit que $\mathcal{M} \models F(a_1/x_1,\dots,a_n/x_n)$.

On définit alors par induction $\mathcal{M} \models F(a_i/x_i)$ par induction

si F close et $\mathcal{M} \models F$, $\mathcal{M}$ est un modèle de F

II Théories et déduction

[C-L] 178 Définition 1 : Soit F une formule close de L, elle est universellement valide si toute L-structure en est un modèle. On note $\vdash^* F$. Elle est contradictoire lorsque $\vdash^* \neg F$

Une formule est universellement valide si sa clôture universelle l'est.

F, G sont équivalentes si $(F \Leftrightarrow G)$ est universellement valide

On note $F \sim G$

Définition 2 : Une théorie de L est un ensemble de formules closes. Ses éléments sont appelés axiomes.

Définition 3 : $\mathcal{M}$ est un modèle de T, noté $\mathcal{M} \models T$, lorsque $\mathcal{M} \models F$ pour tout $F \in T$

Définition 4 : Soit T une théorie, F une formule close sur L

T est consistante si elle admet un modèle, contradictoire sinon.

T est finiment consistante si toute partie finie de T est consistante

F est conséquence sémantique de T si tout modèle de T est modèle de F. On note $T \vdash^* F$

Exemple : $\vdash^* F$ si et seulement si $\emptyset \vdash^* F$

pour tout $F \in T$, on a $T \vdash^* F$

Définition 5 : soit F une formule, $T \vdash^* F$ lorsque $T \vdash^* G$ pour G une clôture universelle de F

Définition 6 : T et T' sont équivalentes lorsque tout axiome de l'une est conséquence de l'autre

Exemple : soit T la théorie des groupes sur L_G, i.e.

$T = T_{eg} \cup \{\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z) = (x \cdot (y \cdot z))), \forall x (x \cdot e = x) \wedge (e \cdot x = x), \forall x \exists y (x \cdot y = e) \wedge (y \cdot x = e)\}$, où T_{eg} est la théorie de l'égalité

Elle est équivalente à $T' = (T \setminus \{\forall x \exists y (x \cdot y = e) \wedge (y \cdot x = e)\}) \cup \{\forall x \exists y (x \cdot y = e)\}$.

Théorème 7 (Lowenheim-Skolem) : On suppose L dénombrable. Alors toute théorie consistante sur L admet un modèle dénombrable si et seulement si elle admet un modèle infini $\}$ DVP

[DNR] ex 2.32 p 93

⚠ : mal placé
utilisé

[C-L] 187 **Proposition 8** : Soient L, L' deux langages avec $L \subset L'$, $\mathcal{M}$ une L-structure, $\mathcal{M}'$ un enrichissement de $\mathcal{M}$ à L'. Soit $F = F(x_1, \dots, x_n)$ une formule de L. Alors $\mathcal{M} \models F(a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si $\mathcal{M}' \models F(a_1, \dots, a_n)$

~~– Déduction et sémantique~~

[C-L] 205 **Définition 9** : deux L-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes (noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si pour toute formule close F, on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\mathcal{N} \models F$

Définition 10 : soit T une théorie dans L. Elle est complète lorsqu'elle est consistante et vérifie, pour toute formule close F, $T \vdash^* F$ ou $T \vdash^* \neg F$

Proposition 11 : T est complète si elle est consistante et tous ses modèles sont élémentairement équivalents

– Déduction syntaxique et dualité syntaxe/sémantique

[C-L] 237 **Théorème (de correction)** : soit T une théorie, F une formule, alors si $T \vdash F$, on a $T \vdash^* F$ et si $\vdash F$ alors $\vdash^* F$

Théorème (de complétude) : Si F est close, alors $T \vdash^* F$ si et seulement si $T \vdash F$

Corollaire : toute théorie cohérente admet un modèle

[C-L] 245 **Théorème (de compacité)** : T est consistante si et seulement si elle est finiment consistante

Application : il existe des modèles de l'arithmétique de Peano non isomorphes à $\mathbb{N}$ (défini en annexe)

Application : la théorie des groupes n'est pas syntaxiquement complète

III Structure et clôture de la classe des modèles

Définition 12 : Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T, $\mathcal{N}$ est un sous-modèle lorsque $\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$ qui est un modèle de T. ~~On dit que $\mathcal{M}$ est une extension de $\mathcal{N}$.~~ [C-L] 197

Proposition 13 : Soit $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ deux L-structures telles que $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ soit une extension de $\mathcal{N} = \langle N, \dots \rangle$. Soit $t = t[x_1, \dots, x_n]$ un terme de L, $(a_1, \dots, a_n) \in N^n$, alors $\bar{t}^{\mathcal{M}}[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] = \bar{t}^{\mathcal{N}}[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n]$. [C-L] 198

Théorème 13 : Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $\mathcal{N}$ une sous-structure, $F(x_1, \dots, x_n)$ une formule universelle, $G(x_1, \dots, x_n)$ une formule existentielle, alors, si $(a_1, \dots, a_n) \in N^n$

si $\mathcal{M} \models F(a_1, \dots, a_n)$ alors $\mathcal{N} \models F(a_1, \dots, a_n)$

si $\mathcal{N} \models G(a_1, \dots, a_n)$ alors $\mathcal{M} \models G(a_1, \dots, a_n)$

Théorème 14 : soit $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$, $\mathcal{N} = \langle N, \dots \rangle$ deux L-structures. Soit $h : M \to N$ un isomorphisme (s'il existe) et $F = F(x_1, \dots, x_n)$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$, alors $\mathcal{M} \models F(a_1, \dots, a_n)$ ssi $\mathcal{N} \models F(h(a_1), \dots, h(a_n))$

Corollaire : deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes

Définition 15 : Soit $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ deux L-structures, $\mathcal{N}$ sous-structure de $\mathcal{M}$. $\mathcal{N}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}$ une extension élémentaire de $\mathcal{N}$), noté $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, lorsque pour toute formule $F(x_1, \dots, x_n)$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in N^n$, $\mathcal{M} \models F(a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models F(a_1, \dots, a_n)$ [C-L] 191

Exemples : dans L_G, $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est une sous-structure non-élémentaire de $\langle \mathbb{Q}, 0, + \rangle$, comme en témoigne $\forall x \exists y (y + y = x)$. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle$ sont isomorphes, mais $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle$ reste une sous-structure non élémentaire (prendre $F = \exists x (x + x = 2)$)

[C-L2] 195 Théorème 16 : Soit $\mathcal{M}$ une extension de $\mathcal{N}$ telle que ~~pour~~ $F = F(x_0, \dots, x_n)$ et $(a_1, \dots, a_n) \in N$ vérifiant $\mathcal{M} \models \exists x_0 F(x_0, a_1, \dots, a_n)$, il existe $a_0 \in N$ tel que $\mathcal{M} \models F(a_0, \dots, a_n)$

[C-L2] 201 Alors $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$

Théorème 17 (Lowenheim-Skolem ascendant) : Une L-structure $\mathcal{M}$ admet des extensions élémentaires de tout cardinal supérieur à sup (card M, card L)

205 Théorème 18 : $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles ont une extension élémentaire commune à isomorphisme près

[C-L2] 216 Définition 19 : une théorie est universelle (resp. existentielle) si toutes ses formules le sont

Exemple : la théorie de l'égalité est universelle

Définition 20 : T est préservée par sous-structure (resp. extension) si, pour $\mathcal{M} \models T$, toute sous-structure (resp. extension) de $\mathcal{M}$ est modèle de T.

Théorème 21 : T est préservée par sous-structure (resp. extension) ssi elle est équivalente à une théorie universelle (resp. existentielle)

IV Exemples de théories, propriétés, décidabilité

Définition 22 : Soit F une formule close, c'est un théorème de T lorsque $T \vdash F$. On note $th(T)$ l'ensemble des théorèmes de T.

Définition 23 : T est décidable lorsque le problème de l'appartenance d'une formule close à $th(T)$ l'est.

Exemple : une théorie complète est décidable

[DNR] 96 — Théorie de l'égalité

à L égalitaire, on associe $T_{L,eg}$ (annexe)

— Théorie des groupes T_G (annexe)

T_G n'est pas complète : $F = (\forall y \exists x \; x.x = y)$ est valide dans le modèle $\underbrace{(\mathbb{R}, 0, +)}_{\mathcal{M}}$ mais pas dans le modèle $\underbrace{(\mathbb{Z}, 0, +)}_{\mathcal{N}}$ [DNR] 97

$\mathcal{M} \models F$ et $\mathcal{N} \not\models F$ donc $T_G \nvdash^* F$ et $T_G \nvdash^* \neg F$

— Arithmétique T_0 sur $L = \{0, S, +, \times\}$ (annexe)

— Arithmétique de Peano PA sur L (annexe) [DNR] 104

PA est non contradictoire, n'admet pas de modèle fini

PA est indécidable, donc non complète

— Arithmétique de Presburger P_0 (annexe)

L'arithmétique de Presburger est décidable sur $\mathbb{N}$ } DVP

Corollaire : aucune formule $F(x, y, z)$ de L_0 ne vérifie $p = nm \Leftrightarrow \mathbb{N} \models F[n, m, p]$ pour n, m, p entiers [CAR] 178

Remarque : le troisième axiome de T_G (inv) peut être remplacé par une formule universelle en introduisant un symbole de fonction unaire $^{-1}$

Avec ce formalisme, la théorie des groupes est préservée par sous-structure (théorème 21).

Cela correspond à la notion de sous-groupe : un sous-ensemble d'un groupe $\mathcal{M}$ stable par $\bar{-1}^{\mathcal{M}}$, $\bar{\cdot}^{\mathcal{M}}$ et contenant $\bar{e}^{\mathcal{M}}$ est un groupe.

Réf : [C-L] : Cori-Lascar T 1 [C-L2] : Cori-Lascar T 2 [DNR] : David, Nour, Raffalli : Introduction à la logique

Annexe

$$T_{L,eq} = \{\forall x\,(x=x) \wedge \forall x \forall y\,(x=y \Rightarrow y=x) \wedge \forall x \forall y \forall z\,((x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z)\}$$
$$\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{f\in\mathcal{F}_n(L)} \{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \,(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i) \Rightarrow f(x_1,\dots,x_n) = f(y_1 \dots y_n)\}$$
$$\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{R\in\mathcal{R}_n(L)} \{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \,(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i) \Rightarrow (R(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow R(y_1 \dots y_n))\}$$

T_G théorie sur $L_G = \{e, \cdot\}$

$$T_G = \{\forall x \forall y \forall z\,((x.y).z) = (x.(y.z))\}\ (As)$$
$$\cup \{\forall x\ (x.e) = x \wedge (e.x) = x\}\ (EN)$$
$$\cup \{\forall x\,\exists y\ (x.y) = e \wedge (y.x) = e\}\ (inv)$$
$$\cup\, T_{L_G,eq}$$

Arithmétique élémentaire T_0 :

$$T_0 = \bigcup_{i=1}^{7} \{A_i\} \cup T_{L,eq}$$

A_1 : $\forall x\, \neg(Sx = 0)$

A_2 : $\forall x\ (x=0) \vee (\exists y\ \ x = Sy)$

A_3 : $\forall x \forall y\ \ Sx = Sy \Rightarrow x = y$

A_4 : $\forall x\ \ x+0 = x$

A_5 : $\forall x\ x + Sy = S(x+y)$

A_6 : $\forall x\ \ x \times 0 = 0$

A_7 : $\forall x \forall y\ \ x \times Sy = x \times y + x$

Arithmétique de Peano PA ; on note, pour F formule, $Rec_{F,x}$ la clôture universelle de $(F[0/x] \wedge \forall y\ F[y/x] \Rightarrow F[Sy/x]) \Rightarrow \forall x\, F$

$$PA = \{Rec_{F,x} \,/\, F \text{ formule de } L\} \cup T_0$$

Arithmétique de Presburger P_0 sur $L_0 = \{0, S, +\}$

$$P_0 = T_{L_0,eq} \cup \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} \cup \{Rec_{F,x} \,/\, F \text{ formule de } L_0\}$$

Théorème de Lowenheim - Skolem

Soit L un langage au plus dénombrable et T une théorie sur L admettant un modèle infini $\mathcal{M}$, alors elle a un modèle dénombrable.

Preuve : - soit M l'ensemble de base de $\mathcal{M}$. On définit $E : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ comme suit : soit $Y \subset M$, pour toute formule $F(x, x_1, \dots, x_n)$ et tout n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ tel que $\mathcal{M} \models \exists x\, F(x, y_1/x_1, \dots, y_n/x_n)$, on choisit un $y \in M$ tel que $\mathcal{M} \models F[y/x, y_1/x_1, \dots, y_n/x_n]$. $E(Y)$ est l'ensemble des éléments ainsi choisis.
c'est donc l'image d'une application partielle de ~~Y x {formules de L}~~ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^n \times \{\text{formules à } n \text{ variables libres sur } L\}$ dans M. En particulier, si Y est au plus dénombrable, alors $E(Y)$ l'est.

- Définition du "futur modèle" :
soit $a \in M$ quelconque. On définit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$X_0 = \{a\}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ X_{n+1} = X_n \cup E(X_n)$
(X_n) est une suite croissante de parties de M au plus dénombrables
donc $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est au plus dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour touts symboles f de fonction n-aire et R de ~~...~~ prédicat n-aire, on définit $R_{\mathcal{N}} = \overline{R}^{\mathcal{M}} \cap N^n$ et $f_{\mathcal{N}} = \overline{f}^{\mathcal{M}}\big|_{N^n}^{N}$. Pour que cette définition soit licite, on doit montrer que $\overline{f}^{\mathcal{M}}(N^n) \subset N$.
Soit donc $(a_1, \dots, a_n) \in N^n$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \in X_k^n$
et $\mathcal{M} \models \overline{f}^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n)$ donc $\mathcal{M} \models \exists x\ x = f(a_1, \dots, a_n)$
Il existe donc $y \in X_{k+1}$ tel que $\mathcal{M} \models y = f(a_1, \dots, a_n)$
d'où $y = \overline{f}^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$, et donc $\overline{f}^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \in N$
$f_{\mathcal{N}}$ est donc bien définie, et on peut définir une L-structure $\mathcal{N}$ de base N par : pour f fonction et R prédicat, $\overline{f}^{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{N}}$ et $\overline{R}^{\mathcal{N}} = R_{\mathcal{N}}$
$\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$, au plus dénombrable
Par induction sur les termes, on obtient pour tout terme $t = t(x_1, \dots, x_n)$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in N^n$, $\overline{t}^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n) = \overline{t}^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$
Par conséquent, par induction sur les formules, pour toute formule $F = F(x_1, \dots, x_n)$, on a $\mathcal{M} \models F(a_1, \dots, a_n)$ ssi $\mathcal{N} \models F(a_1, \dots, a_n)$

En particulier, on a pour toute formule close F, $\mathcal{M} \models F$ si et seulement si $\mathcal{N} \models F$
donc pour tout $F \in T$ $\mathcal{N} \models T$: $\mathcal{N}$ est un modèle de T

De plus, si F_n est une formule axiomatisant le fait d'être de cardinal $\geq n$,
on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M} \models F_n$ donc $\mathcal{N} \models F_n$ ← on en a besoin, car on ne savait pas si $X_n \neq X_{n+1}$!
$\mathcal{N}$ est donc infini : il est dénombrable.

Un exemple de modèle de l'arithmétique de Peano non isomorphe à $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N} \models P_0$ sur $L = \{S, 0, +\}$.

$L' = \{S, 0, +, c\}$.

$\underline{n} = \underbrace{SSS \ldots}_{n \text{ fois}} 0$

$T = P_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\neg c = \underline{n}\}$

On peut ajouter : skolemisation.

Th ? (Lowenheim-Skolem) ? On ne peut pas avoir une structure particulière en logique du premier ordre.

Notion de classe de modèle élémentaire ?

Les modèles qu'on peut décrire avec une théorie élémentaire ⇒ ~~axiomatisable~~
classe de modèle qu'on peut décrire avec des formules.

ex : on ne peut pas capturer tous les ~~langages~~ ensembles finis.

$\{F_n$ axiomatise "être de cardinal $\geq n$"$\}$.

$T_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{F_n\}$.

Supposons T axiomatise "être un ensemble fini."

$T \cup T_\infty$ ⇒ fini et infini (Th de compacité).

Que se passe-t-il si on n'a pas l'égalité dans la logique ?

Pas forcément de modèle égalitaire (si on a l'égalité) ⇒ on peut passer au quotient.