924

Théories et modèles en logique du 1er ordre. Exemples.

I Logique du 1er ordre

1) Syntaxe

Def 1: Une signature est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonction et d'un ensemble $\mathcal{R}$ de relations. A chaque symbole est associé un entier naturel (st. positif pour les symboles de relation) appelé arité.

Rq 2: les symboles de fonction d'arité 0 sont appelés constantes.

Def 3: Soit $S=(\mathcal{F},\mathcal{R})$ une signature et $\mathcal{V}$ un ensemble infini d'éléments appelés variables. On définit les termes par induction :
* les variables et les constantes sont des termes
* Si $f\in\mathcal{F}$ est d'arité $k\geq 1$, et $t_1,\dots,t_k$ sont des termes, alors $f(t_1,\dots,t_k)$ est un terme.

Ex 4: Soit $S_G=(\mathcal{F}_G,\mathcal{R}_G)$ avec $\mathcal{F}_G=\{e(0), *(2), \cdot^{-1}(1)\}$ et $\mathcal{R}_G=\{=(2)\}$. Alors $(e*e)^{-1}$ et $x*y$ avec $x,y\in\mathcal{V}$ sont des termes.

Def 5: Une formule atomique de S est un élément de la forme $r(t_1,\dots,t_k)$ avec $r\in\mathcal{R}$ d'arité k et $t_1,\dots,t_k$ des termes sur S.
Les formules sur S sont définies par induction :
* Une formule atomique est une formule
* Si F et G sont deux formules et $x\in\mathcal{V}$, alors $F\vee G$, $F\wedge G$, $F\to G$, $\neg F$, $\forall x F$ et $\exists x F$ sont des formules.

Ex 6: Sur la signature S_G, $(x*y=y*x)\wedge(x=e)$ est une formule

Def 7: Soit F une formule sur S. L'ensemble $FV(F)$ est défini par induction
* Si $F=r(t_1,\dots,t_k)$, $FV(F)$ est l'ensemble des variables apparaissant dans les t_i.
* Si $F=\varphi_1\bowtie\varphi_2$ avec $\bowtie\in\{\vee,\wedge,\to\}$, $FV(F)=FV(\varphi_1)\cup FV(\varphi_2)$
* Si $F=\neg\varphi$, $FV(F)=FV(\varphi)$
* Si $F=Qx\varphi$ avec $Q\in\{\exists,\forall\}$, $FV(F)=FV(\varphi)\setminus\{x\}$

Def 8: Une formule F est close si $FV(F)=\emptyset$.

Ex 9: $\forall x\exists y\,(x*y=y*x)$ est close, mais pas $\forall x\,(x*y=e)$

2) Modèles

Def 10: Soit S une signature. Une S-structure M est la donnée de :
* Un ensemble D^M appelé domaine.
* Pour $f\in\mathcal{F}$ d'arité k, une fonction $f^M: D^k\to D$
* Pour $r\in\mathcal{R}$ d'arité k, une fonction $r^M: D^k\to\{0,1\}$

Def 11: Soit M une S-structure. Une valuation est une fonction $v:\mathcal{V}\to D^M$.

Def 12: Soit M une S-structure et t un terme de S et v une valuation. La valeur de t dans M, v est définie par induction :
* Si $t=x\in\mathcal{V}$, $Val_{M,v}(t)=v(x)$
* Si $t=f(t_1,\dots,t_k)$, $Val_{M,v}(t)=f^M(Val_{M,v}(t_1),\dots,Val_{M,v}(t_k))$

Def 13: Soit M une S-structure, v une valuation, F une formule. La valeur de F est définie par induction
* $Val_{M,v}(r(t_1,\dots,t_k))=r^M(Val_{M,v}(t_1),\dots,Val_{M,v}(t_k))$
* $Val_{M,v}(\neg\varphi)=1-Val_{M,v}(\varphi)$
* $Val_{M,v}(\varphi_1\vee\varphi_2)=\max(Val_{M,v}(\varphi_1),Val_{M,v}(\varphi_2))$
* $Val_{M,v}(\varphi_1\wedge\varphi_2)=Val_{M,v}(\varphi_1)\times Val_{M,v}(\varphi_2)$
* $Val_{M,v}(\varphi_1\to\varphi_2)=\max(1-Val_{M,v}(\varphi_1),Val_{M,v}(\varphi_2))$
* $Val_{M,v}(\forall x\varphi)=1$ ssi pour tout $a\in D$, $Val_{M,v[x:=a]}(\varphi)=1$
* $Val_{M,v}(\exists x\varphi)=1$ ssi il existe $a\in D$, $Val_{M,v[x:=a]}(\varphi)=1$

Ex 14: Soit $G=GL_2(\mathbb{R})$. Soit M la S_G-structure de domaine G où $*$, $\cdot^{-1}$ et e sont interprétés de façon standard. Soit $v: x\mapsto -I_2$. Alors $Val_{M,v}(x^{-1}=x)=1$ mais $Val_{M,v}(\forall x(x^{-1}=x))=0$.

Rq 15: Si F est close, $Val_{M,v}(F)$ ne dépend pas de v.

Def 16 : Soit F une formule close sur S et M une S-structure. On dit que M est un modèle de F et on note $M \models F$ si $Val_M(F) = 1$.

Def 17 : Une formule close F est dite valide si toute S-structure est un modèle de F. F est dite satisfiable si il existe un modèle de F.

Ex 18 : Si F_1 et F_2 sont deux formules, $(F_1 \wedge F_2) \to (F_2 \wedge F_1)$ est valide.

3) Théories

Def 19 : Une théorie sur S est un ensemble de formules closes.

Ex 20 : Dans la suite, on suppose que S contient un symbole = d'arité 2 et que nos théories contiennent :

$$T_{eq} = \{\forall x\,(x=x),\ \forall x \forall y\,(x=y \to y=x),\ \forall x \forall y \forall z\,(x=y \wedge y=z \to x=z)\}$$
$$\cup \{(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i) \to f(x_1 \ldots x_k) = f(y_1 \ldots y_k) \mid f \in \mathcal{F} \text{ d'arité } k\}$$
$$\cup \{(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i) \to (r(x_1 \ldots x_k) \to r(y_1 \ldots y_k)) \mid r \in R \text{ d'arité } k\}$$

Ex 21 : On définit la théorie des groupes :

$$T_G = T_{eq} \cup \{\forall x \forall y \forall z\,((x*y)*z = x*(y*z)),\ \forall x\,(x*e = x \wedge e*x = x),\ \forall x\,(x*x^{-1} = e \wedge x^{-1}*x = e)\}$$

Def 22 : Soit T une théorie sur S et M une S-structure. On dit que M est un modèle de T si $\forall F \in T$, $M \models F$.
On dit qu'une théorie T est cohérente (ou non-contradictoire) si elle admet un modèle.

Def 23 : Soit T une théorie et F une formule close. On dit que F est valide dans T si tout modèle de T est modèle de F. On note $T \models F$.
Une théorie T est complète si pour toute formule close, $T \models F$ ou $T \models \neg F$.

Ex 24 : La théorie des groupes n'est pas complète.

Def 25 : Une théorie T sur S est dite décidable si le problème

T-VALID | Entrée : F formule close sur T
Sortie : Oui si $T \models F$, non sinon

est décidable.

DEV 1 : La théorie vide est indécidable.

II Méthode de la résolution

Rq 26 : $T \models F$ ssi $T \cup \{\neg F\}$ est contradictoire (i.e. n'admet pas de modèle).

Prop 27 : Soit φ F une formule close sur S. Alors il existe $\tilde{F}$ une formule close sous forme prénexe normale conjonctive (i.e. de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ \varphi$ avec $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et φ sans quantificateur en FNC) qui lui est équivalente.

Th 28 : Soit F une formule close sur S sous forme prénexe normale conjonctive. Alors il existe $S' \supseteq S$ et $\tilde{F}$ une formule close sur S' en forme normale de Skolem (i.e. de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi$ avec φ en FNC sans quantif.) telle que F et $\tilde{F}$ sont équisatisfiables.

Th 29 : Soit T une théorie sous forme normale prénexe. Soit $\tilde{T}$ obtenue par skolémisation de T. Alors $\tilde{T}$ est contradictoire ssi T l'est.

Def 30 : On définit la règle de la résolution :

$$\frac{\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_i \vee l_1 \vee \ldots \vee l_n \qquad \neg\psi'_1 \vee \ldots \vee \neg\psi'_j \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_m}{l_1\sigma \vee \ldots \vee l_n\sigma \vee l'_1\sigma \vee \ldots \vee l'_m\sigma}\ \text{res}$$

si $\{\psi_1, \ldots, \psi_i, \psi'_1, \ldots, \psi'_j\}$ sont unifiables d'unificateur principal σ.
Pour T une théorie en forme normale de Skolem, et F une formule close, on note $T \vdash F$ s'il existe un arbre de preuve par résolution de T à F.

2) Modèles de Herbrand

Def 31 : Un modèle de Herbrand de S est un modèle dont le domaine est l'ensemble des termes clos de S.
De plus, $f^M(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k)$.

Th 32 : $T \cup \{\neg F\}$ est contradictoire ssi $T \cup \{\neg F\} \vdash \bot$

3) Conséquences ⊕ADDENDUM

Def 33 : Une théorie T est dite récursive si le problème | Entrée : F formule close
Sortie : Oui si $F \in T$, non sinon

est décidable.

Th 34 : Si T est récursive, le problème T-VALID est dans RE.

Th 35 : Si T est complète et récursive, le problème T-VALID est décidable (on dit que T est décidable).

III Théories arithmétiques

1) Arithmétique de Presburger

Def 36 : On définit la théorie de Presburger sur la signature $\mathcal{F} = \{0\,(0), 1\,(0), +\,(2)\}$, $\mathcal{R} = \{=\,(2)\}$:

$$T_{pres} = \{\forall x\ (x+1 \neq 0), \forall x\,[(x=0) \vee \exists y\,(x=y+1)],$$
$$\forall x \forall y\ x+1=y+1 \rightarrow x=y,\ \forall x\ (x+0=x),$$
$$\forall x \forall y\ [x+(y+1)=(x+y)+1]\}$$
$$\cup \{[\varphi(0) \wedge \forall y\ \varphi(y) \rightarrow \varphi(y+1)] \rightarrow \forall y\ \varphi(y) \mid \varphi(x) \text{ formule}\}$$

Lemme 37 (admis) : Soit F une formule close. Alors $T_{pres} \models F$ ssi $\mathbb{N} \models F$.

DEV 2 : La théorie de Presburger est décidable.

2) Arithmétique de Peano

Def 38 : On définit la théorie de Peano sur la signature $\mathcal{F} = \{0\,(0), 1\,(0), +\,(2), \times\,(2)\}$, $\mathcal{R} = \{=\,(2)\}$:

$$T_{Peano} = T_{Pres} \cup \{\forall x\ (x \times 0 = 0), \forall x \forall y, x \times (y+1) = (x \times y) + x\}$$

Th 39 (admis) : T_{Peano} est indécidable.

Th 40 (admis) : Soit T une théorie récursive cohérente et telle que $T_{Peano} \subset T$. Alors T est incomplète.

Cor 41 : Soit $T = \{\varphi \mid (\mathbb{N}, +, \times) \models \varphi\}$. T est non récursive.

Ex 42 (admis) : Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

$u_0 = m$

u_{n+1} est obtenu en écrivant u_n en base $(n+2)$ y compris les exposants et en remplaçant les $n+2$ par des $n+3$, et en enlevant 1 au résultat.

(Ex : $u_0 = 9 = 2^{2^1+1}+1$ $\quad u_1 = 3^{3^1+1}+1-1 = 81$

$u_2 = 4^{4^1+1}-1 = 1023$ etc.)

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 0.

Ce résultat est indémontrable dans T_{Peano}.

Références :

* Cori, Lascar, Logique mathématique II
* David, Nour, Raffalli, Introduction à la logique
* Lalement, Logique, réduction, résolution
* Lassaigne, de Rougemont, Logique et fondements de l'informatique
* Papadimitriou, Computational complexity
* Stern, Fondements mathématiques de l'informatique

Addendum (II.3)) :

Th : (de compacité)
Soit T une théorie contradictoire. Alors il existe $T_f \subseteq T$ finie telle que T_f est contradictoire.

Cor : (th. de Löwenheim-Skolem ascendant)
Soit T une théorie admettant des modèles de cardinaux finis arbitrairement grands. Alors T admet un modèle infini.

Th : (th. de Löwenheim-Skolem descendant)
Soit S une signature dénombrable et T une théorie sur S. Si T admet un modèle, alors T admet un modèle au plus dénombrable.