NP-complétude et approximation : Problème du voyageur de commerce

PVC

Entrée : $G = (S, A)$, un graphe non orienté ; $\omega : A \to \mathbb{N}$ un poids sur les arêtes.

Sortie : $C = (s_0, ...s_n = s_0)$ cycle de G passant (une seule fois) par chaque sommet, de poids minimal.

Définition 0.1 (Algorithme d'approximation)**.** *Soit X un problème d'optimisation, et $\rho > 1$. On note $v(X)$ la valeur optimale de X. On dit que A est un algorithme de ρ-approximation de X si pour toute instance de X, A retourne une solution de valeur inférieure à $\rho v(X)$.*

1 Algorithme de 2-approximation

Dans le cas des graphes euclidiens, où la fonction de poids respecte l'inégalité triangulaire, on a l'algorithme suivant d'approximation.

`2PVC`(G, ω)	
`Trouver un arbre couvrant de poids minimal`	Algorithme de Prim
`Retourner les sommets dans l'ordre de parcours en profondeur`	Complexité linéaire

Remarque Si on autorise de passer plusieurs fois par un même sommet, et qu'on définit

$$\forall s, s' \in S^2, \omega_0(s, s') = \min\{\omega(s \to s'), s \to s' \text{ chemin de } s \text{ à } s'\},$$

on a une distance euclidienne.

Proposition 1.1 (Correction de l'algorithme)**.** *L'algorithme `2PVC` renvoie un chemin de poids total inférieur à 2 fois la valeur optimale pour un graphe euclidien.*

Démonstration. Soit $C = (s_0, ...s_n = s_0)$ renvoyé par l'algorithme et $C' = (s'_0, ...s'_n = s'_0)$ optimal.

1. Dans un parcours en profondeur de l'arbre, on parcourt deux fois chaque arête. Par inégalité triangulaire, $\omega(C) \leqslant 2\omega(A)$ pour A arbre couvrant minimal donc pour tout arbre couvrant.
2. $A' = (s'_0, ...s'_{n-1})$ est un arbre couvrant de poids inférieur à $\omega(C')$, donc $\omega(C) \leqslant 2\omega(A) \leqslant 2\omega(A') \leqslant 2\omega(C')$

□

2 Cas général

Théorème 2.1 (Condition suffisante pour $P = NP$)**.** *Soit $\rho > 1$. S'il existe un algorithme polynomial de ρ-approximation de PVC, alors $P = NP$.*

Démonstration. On réduit le problème NP-complet du cycle hamiltonien à PVC. Soit $G = (S, A)$ une entrée de CycleHamiltonien. On définit alors :

$$\omega(s, s') = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, s') \in A \\ \rho(|S| + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

et on applique l'algorithme de ρ-approximation à $((S, S^2), \omega)$

1. Si le chemin retourné est de longueur $|S| + 1$, alors c'est un cycle hamiltonien dans (S, A).
2. Sinon, le chemin retourné est de longueur strictement supérieure à $\rho(|S| + 1)$, donc il n'en existe pas de longueur inférieure ou égale à $|S| + 1$, donc pas de cycle hamiltonien dans (S, A).

Si on dispose d'un algorithme polynomial de ρ-approximation de PVC, alors on a un algorithme polynomial pour CycleHamiltonien donc $P = NP$. □

Ref : *Computers and Intractability : A guide to the Theory of NP-Completeness*, Garey, Johnson