Théorème d'Ascoli

2012-2013

Soit (X, d) un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique.
Soit E une partie de $\mathcal{C}^0(X, X')$.

Définition.
– E est équicontinue si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \forall f \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

– E est uniformément équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall f \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

– E est ponctuellement truc si :

$$\forall x \in X, \{f(x), f \in E\} \text{ est truc}$$

On rappelle que dans notre cas où X est compact, équicontinue est équivalent à uniformément équicontinue.

Démonstration. Il est évident que uniformément équicontinue implique équicontinue.
Supposons E équicontinue.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que :

$$\forall y \in X, \forall f \in E, d(x, y) < \eta_x \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\bigcup\limits_{x \in X} B\left(x, \dfrac{\eta_x}{2}\right)$ est un recouvrement d'ouverts de X, et X est compact, donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B\left(x_i, \dfrac{\eta_{x_i}}{2}\right)$.
On pose $\eta := \min\limits_{1 \leq i \leq n} \dfrac{\eta_{x_i}}{2}$.
Soit $f \in E$ et $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \eta$.
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in B\left(x_i, \dfrac{\eta_{x_i}}{2}\right)$.
Alors $d(x, x_i) < \eta_{x_i}$ donc $d'(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$ et :

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \eta + \frac{\eta_{x_i}}{2} \leq \eta_{x_i}$$

donc $d'(f(y), f(x_i)) < \varepsilon$.
Finalement :

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) < 2\varepsilon$$

Donc E est uniformément équicontinue. $\square$

Théorème (Ascoli)**.**
E est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si E est équicontinue et ponctuellement relativement compacte.

Démonstration.
$\Rightarrow$: – Soit $x \in X$, on note $E(x) := \{f(x), f \in E\}$. Montrons que $E(x)$ est relativement compact.
L'application :

$$\begin{aligned} \Phi_x : \mathcal{C}^0(X, X') &\longrightarrow X' \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne donc continue, donc $\overline{E}(x) = \Phi_x(\overline{E})$ est compact (car E est relativement compact).
Or $\overline{E(x)} \subset \overline{E}(x)$ et $\overline{E(x)}$ est fermé donc est compact.

– E est relativement compact donc E est précompact.
Soit $x \in X$, $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_N \in E$ tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(f_i, \varepsilon)$.
Pour tout i, f_i est continue en x donc :

$$\exists \eta_i > 0, \forall y \in X, d(x, y) < \eta_i \Rightarrow d'(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

On pose $\eta := \min \eta_i$, alors :

$$\forall i, \forall y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

Soit désormais $f \in E$, alors il existe i tel que $d_\infty(f, f_i) < \varepsilon$.
Soit $y \in X$ tel que $d(x, y) < \eta$, alors :

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_i(x)) + d'(f_i(x), f_i(y)) + d'(f_i(y), f(y)) < 3\varepsilon$$

Donc E est équicontinue.

$\Leftarrow$: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Le but est de montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge dans $(\mathcal{C}^0(X, X'), d_\infty)$.
X est compact donc X est séparable. Soit $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ dense dans X.
E est ponctuellement relativement compact donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $K_k \subset X'$ compact tel que $(f_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}} \subset K_k$.
$(f_{n|D})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\prod_{k\in\mathbb{N}} K_k$ compact par le théorème de Tykhonov, donc il existe une sous-suite $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement sur D.

Montrons que $(f_{n_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout $x \in X$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors par équicontinuité de E il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in X, \forall l \in \mathbb{N}, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f_{n_l}(x), f_{n_l}(y)) < \varepsilon$$

Soit $x \in X$, D est dense donc il existe k tel que $d(x, x_k) < \eta$. $(f_{n_l}(x_k))_{l\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy :

$$\exists L_k, \forall l, l' \geq L_k, d'(f_{n_l}(x_k), f_{n_{l'}}(x_k)) < \varepsilon$$

D'où, pour tout $l, l' \geq L_k$,

$$\begin{aligned} d'(f_{n_l}(x), f_{n_{l'}}(x)) &\leq d'(f_{n_l}(x), f_{n_l}(x_k)) + d'(f_{n_l}(x_k), f_{n_{l'}}(x_k)) + d'(f_{n_{l'}}(x_k), f_{n_{l'}}(x)) \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

$(f_{n_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et $\overline{E(x)}$ est compact donc complet, donc $(f_{n_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ converge dans (X', d') vers $f(x)$ pour tout $x \in X$.
Montrons que la convergence est uniforme.

En conservant les notations précédentes, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X \subset \displaystyle\bigcup_{k=0}^{N} B(x_k, \eta)$.

On pose $L := \max\limits_{0\leq k\leq N} L_k$, on a alors :

$$\forall l, l' \geq L, \forall x \in X, d'(f_{n_l}(x), f_{n_{l'}}(x)) < 3\varepsilon$$

En faisant tendre $l' \to \infty$, on obtient :

$$\forall l \geq L, d_\infty(f_{n_l}, f) < 3\varepsilon$$

$\square$