# Théorème d'Ascoli

2014-2015

Nous allons ici montrer une version un peu affaiblie du théorème d'Ascoli, qui permet de caractériser les compacts des espaces de fonctions continues.

On se place dans la suite dans un espace métrique compact $(X, \mathrm{d})$, et on considère l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues de $X$ vers lui même, muni de sa distance infinie $\mathrm{d}_\infty$.

**Définition.** Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X)$ est dite *équicontinue en* $x_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x_0, \varepsilon) \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X, \quad \mathrm{d}(x_0, x) \leq \delta \Rightarrow \mathrm{d}(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ sera dite *équicontinue* si elle l'est en tout point.

**Lemme.** Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$, si $\mathcal{F}$ est équicontinue, alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.

**Démonstration** Supposons $\mathcal{F}$ équicontinue.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que :

$$\forall y \in X, \forall f \in \mathcal{F}, \mathrm{d}(x, y) < 2\eta_x \Rightarrow \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\displaystyle\bigcup_{x \in X} B\left(x, \eta_x\right)$ est un recouvrement d'ouverts de $X$, et $X$ est compact, donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \eta_{x_i}\right)$.

On pose $\eta := \min\limits_{1 \leq i \leq n} \eta_{x_i}$.

Soient $f \in \mathcal{F}$, $x \in X$, et $1 \leq i \leq n$ tel que $\mathrm{d}(x, x_i) \leq \eta_{x_i}$. Soit enfin $y \in X$ tel que $d(x, y) < \eta$.

Alors $\mathrm{d}(x, x_i) < \eta_{x_i}$ donc $\mathrm{d}(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$ et :

$$\mathrm{d}(y, x_i) \leq \mathrm{d}(y, x) + d(x, x_i) < \eta + \eta_{x_i} \leq 2\eta_{x_i}$$

donc $\mathrm{d}(f(y), f(x_i)) < \varepsilon$.

Finalement :

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq \mathrm{d}(f(x), f(x_i)) + \mathrm{d}(f(x_i), f(y)) < 2\varepsilon$$

Donc $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue. $\square$

**Théorème d'Ascoli** Soit $X$ un espace métrique compact, $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}(X)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est compacte dans $\mathcal{C}(X)$ pour la topologie induite par $\mathrm{d}_\infty$
2. $\mathcal{F}$ est équicontinue

**Démonstration :**

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ compacte, montrons qu'elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, on peut prendre $f_1, ..., f_p \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon)$.

Soit alors $x_0 \in X$ ; pour $1 \leq i \leq p$, $f_i$ étant continue en $x_0$, il existe $\delta_i$ tel que

$$\forall x, \mathrm{d}(x, x_0) \leq \delta_i \Rightarrow \mathrm{d}(f_i(x), f_i(x_0)) \leq \varepsilon$$

Les $f_i$ sont alors équicontinues en $x_0$, de constante $\delta(x_0, \varepsilon) = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$.

Soient maintenant $f \in \mathcal{F}$, et $i$ tel que $f \in B(f_i, \varepsilon)$. Pour $x \in B(x_0, \varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f(x), f(x_0)) &\leq \mathrm{d}(f(x), f_i(x)) + \mathrm{d}(f_i(x), f_i(x_0)) + \mathrm{d}(f_i(x_0), f_i(x)) \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

Ceci étant vrait pour tout $x_0$, $\mathcal{F}$ est bien équicontinue.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ équicontinue, donc uniformément équicontinue d'après le lemme, et prenons une suite $(f_n)_n \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On va montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.

$X$ étant compact, il est séparable, et soit alors $\Delta = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ une partie dénombrable et dense de $X$.

Remarquons que $\forall x \in X, (f_n(x))_n$ est à valeurs dans $X$ compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente. On va récursivement appliquer ce procédé aux points de $\Delta$, et construire une suite d'extractions $((f_{k,n})_n)_k$ dont le $k-$ième terme vérifie la propriété

$$\forall 1 \leq i \leq k,\ f_{k,n}(x_i) \longrightarrow_n l_i \qquad (P_k)$$

— On extrait $(f_{1,n})_n$ de $(f_n)_n$, de manière à ce que $(f_{1,n}(x_1)) \longrightarrow_n l_1$
— Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $((f_{k,n})_n)_k$ vérifie $(P_k)$. On extrait $(f_{k+1,n})_n$ de $(f_{k,n})_n$, de manière à ce que $f_{k+1,n}(x_{k+1}) \longrightarrow_n l_{k+1}$. $(f_{k+1,n})_n$ vérifie alors bien $(P_{k+1})$.

La suite $(g_n)_n = (f_{n,n})_n$ est alors une extraction de $(f_n)_n$ qui vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g_n(x_k) \longrightarrow x_k \qquad (P_\infty)$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G} = \{(g_n)_n, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément Cauchy, autrement dit $(g_n)_n$ est convergente pour $\mathrm{d}_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ est aussi uniformément équicontinue. Prenons $\delta$ (que l'on choisit inférieur à $\varepsilon$) tel que

$$\forall x, y \in X, \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{d}(x, y) \leq \delta \Rightarrow \mathrm{d}(g_k(x), g_k(y)) \leq \varepsilon$$

Comme $\Delta = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $X$, on a

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, \delta)$$

$X$ étant compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, et, plus simplement, il existe $K$ tel que

$$X = \bigcup_{k=1}^{K} B(x_k, \delta)$$

Comme pour tout $k$, $(g_n(x_k))_n$ est de Cauchy, $\{(g_n(x_1))_n, \dots, (g_n(x_K))_n\}$ est uniformément Cauchy, soit donc $N$ tel que

$$\forall 1 \leq k \leq K, \quad m, n \geq N \Rightarrow \mathrm{d}(g_n(x_k), g_m(x_k)) \leq \varepsilon$$

Soit enfin $x \in X$. Prenons $k$ tel que $\mathrm{d}(x, x_k) \leq \varepsilon$. On a, $\forall m, n \geq N$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g_m(x), g_n(x)) &\leq \mathrm{d}(g_m(x), g_m(x_k)) + \mathrm{d}(g_m(x_k), g_n(x_k)) + \mathrm{d}(g_n(x_k), g_n(x)) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quelque soit $x$, $\mathcal{G}$ est bien uniformément Cauchy, et on a ainsi extrait une sous-suite de $(f_n)_n$ convergeant vers $f$ pour $\mathrm{d}_\infty$. La fonction $f$ étant limite uniforme de fonctions continues vers $X$ complet (car compact), $f$ est bien dans $\mathcal{C}(X)$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est compact. $\square$

**Remarques.** Ces hypothèses ne sont pas optimales. On peut supposer $\mathcal{F}$ à valeurs dans un espace métrique quelconque $Y$. Si $Y$ n'est pas compact, l'énoncé du théorème est le même, mais la preuve nécéssite l'utilisation du théorème de Tychonov (pour un produit dénombrable de compacts). Si $Y$ n'est pas complet, l'hypothèse sur $\mathcal{F}$ devient : $\mathcal{F}$ relativement compacte.

**Source.** Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*