Banach-Tarski

Références

- RMS 118 n°3, *Le paradoxe de Banach-Tarski*, T. Deheuvels, J. Le Borgne, G. Rolland
- Le paradoxe de Banach-Tarski, GUINOT
- Alessandri : Groupes en situation géométrique (pour le lemme du ping-pong, il n'y a pas la preuve, je crois).

Cadre : G groupe et X, G-ensemble. Dans ce document, il sera noté en gris les éléments que l'on conseille de mettre dans le plan pour les résultat et dans la tête pour les preuves (pour des raisons de facilité et de temps).

Définition 1 (*Congruence et Équidécomposabilité*)

Soient $A, B \subset X$.

- *A et B sont congruents (on note $A \approx B$) si il existe $g \in G$ tel que $B = gA$.*
- *A et B sont équidécomposables (on note $A \simeq B$) si il existe $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \cdots A_n$ une partition de A, $B_1, \cdots B_n$ une partition de B tels que pour tout $i \in \{A, \cdots, n\}$, on ait $A_i \approx B_i$.*

Ces relations sont des relations d'équivalence

Définition 2 (*Dédoublable*)

Un G-ensemble X est dit dédoublable s'il existe $A \subset X$ tel que $A \simeq X$ et $X \setminus A \simeq X$

Théorème 1 (*Banach-Tarski faible*)

Il existe D partie dénombrable de $\mathbb{S}^2$, tel que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ soit dédoublable (sous l'action naturelle de $SO_3(\mathbb{R})$).

Idée de la preuve : On note $L_2 = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ le groupe libre de rang 2 : Il s'identifie à l'ensemble des mots *réduits* sur l'alphabet $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Ils sont réduits au sens où il ne contiennent aucun des mots aa^{-1}, bb^{-1}, $a^{-1}a$, $b^{-1}b$.

- Le groupe libre de rang 2 est dédoublable par action sur lui-même de translation à gauche.
- Le groupe libre de rang 2 s'injecte dans $SO_3(\mathbb{R})$
- On montre (cf. lemme 2) que la propriété de dédoublabilité du groupe libre se transmet à la sphère $\mathbb{S}^2$, quitte à retirer un nombre dénombrable de points.

Démonstration du premier point : L_2 est dédoublable.

Considérons $A \subset L_2$ l'ensemble des mots réduits commençant par la lettre a. L'ensemble $A' = a^{-1}A$ est alors l'ensemble des mots réduits ne commençant pas par a^{-1}. En effet un élément de A est de la forme réduite $a^k v$, avec $k > 0$ et v réduit qui est vide ou commence par b ou b^{-1}. Ainsi $a^{-1}a^k v$ ne peut commencer que par a, b, b^{-1} ou éventuellement être vide.

Posons respectivement A', B, B' les ensembles des mots réduits qui commencent par a^{-1}, b, b^{-1}. En généralisant ce que l'on a montré ci-dessus on a donc : aA', $b^{-1}B$ et bB' qui sont respectivement les ensembles des mots ne commençant pas par a^{-1}, b et b^{-1}.

Par suite, on sait que $L_2 = A \sqcup B \sqcup A' \sqcup B' \sqcup \{\varepsilon\}$ et de plus $a^{-1}A \cup b^{-1}B = L_2$ et $aA' \cup bB' \cup \{\varepsilon\} = L_2$. On a bien montré qu'on a une partition de L_2 en deux sous-ensembles : $A \cup B$ et $A' \cup B' \cup \{\varepsilon\}$ qui sont chacun équidécomposables à L_2.

D'où le résultat voulu.

Démonstration du second point : On va utiliser le lemme dit "du Ping-pong" (il est conseillé de le mettre dans le plan).

Lemme 1 (*Ping-Pong*)

Si X est un G-ensemble. $Y, Z \subset X$, non-vides avec $Y \not\subseteq Z$. Et si il existe H, K deux sous-groupes de G tels que

- *Pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, $h \cdot Y \subset Z$*
- *Pour tout $k \in K \setminus \{1\}$, $k \cdot Z \subset Y$*
- *et Card $H \geq 3$, Card $K \geq 2$.*

Alors $\langle H \cup K \rangle \simeq H * K$

Démonstration : Soit $u \in \langle H \cup K \rangle$ que l'on voit comme un mot réduit non vide sur l'alphabet $H \cup K$. Montrons qu'alors $u \neq 1$ (c'est bien montrer qu'il n'y a aucune "relation" entre les éléments de H et ceux de K, car une telle relation au sens de la théorie des groupes pourrait s'écrire $u = 1$ pour u un certain mot en H et K) [1].

Comme Card $H \geq 3$, il existe $h \in H$ tel que $v = h^{-1}uh$ commence (en tant que mot réduit) par un élément de H et termine par un élément de H. En effet, pour cela on distingue les cas :

- Si u termine et commence par un élément de h, alors $v = u$ convient.
- Si u termine par $h \in H$ et ne commence pas par un élément de H, alors on prend $h' \in H$ différent de h^{-1} et de l'identité et on conjugue par h'. [2]
- Si u ne termine pas un élément de H mais commence par $h \in H$, alors on prend $h' \in H$ différent de h et de l'identité et on conjugue par h'.
- Si u ne termine ni ne commencer par un élément de H, on prend h non-identité dans H, et on conjugue par h.

Dans tous les cas, v commence et termine par une lettre de H en tant que mot réduit.

Par hypothèse il existe $x \in Y \setminus Z$. Alors on montre facilement par récurrence sur le nombre de lettres de v que $vx \neq x$ et donc $x \neq 1$ et donc $u \neq 1$.

D'où le lemme du Ping-pong ∎

Considérons maintenant :

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ d'angle $\arccos(\frac{1}{3})$ et d'axes orthogonaux. Chacun de ses deux élément engendre un groupe infini (et donc isomorphe à $\mathbb{Z}$).

Et on va appliquer le lemme du Ping-pong aux groupes $H = \langle h \rangle$ et $K = \langle k \rangle$, sous-groupes de $G = \langle H \cup K \rangle$.

G est un sous-groupe de SO_3 et agit donc naturellement sur $\mathbb{R}^3$. Observons l'action de ses

1. On pourrait montrer de manière plus rigoureuse que si $\langle H \cup K \rangle$ vérifie cette propriété alors il a la propriété universelle produits libres : Pour tout groupe L et pour tout morphismes $\psi : H \to L$ et $\psi' : K \to L$, il existe un unique morphisme de groupe $\varphi : \langle H \cup K \rangle \to L$ qui coïncide avec ψ sur H et avec ψ' sur K.

2. On utilise ici et dans le cas suivant l'hypothèse que le cardinal de H est strictement supérieur à 3

générateurs sur un triplet particulier :

$$h\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{3} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-6b}{3} \\ \dfrac{(2a+b)\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{3c}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{3} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+6b}{3} \\ \dfrac{(-2a+b)\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{3c}{3} \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{3} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3a}{3} \\ \dfrac{(b+2c)\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{c-6b}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{3} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3a}{3} \\ \dfrac{(b-2c)\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{c+6b}{3} \end{pmatrix}$$

On remarque ainsi que l'ensemble $X = \left\{ \left(\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{3}}{3^k}, \frac{c}{3^k}\right)^T \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$ est stable par G. Ce qui nous donne, quitte à diviser le coefficient du milieu[3] par $\sqrt{3}$, une action de G sur $X' = \left\{ \left(\frac{a}{3^k}, \frac{b}{3^k}, \frac{c}{3^k}\right)^T \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$.

Les formules ci-dessus se réécrivent alors :

$$h \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a-6b \\ 2a+b \\ 3c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+6b \\ -2a+b \\ 3c \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3a \\ b+2c \\ c-6b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3a \\ b-2c \\ c+6b \end{pmatrix}$$

Ainsi les ensembles

- $Y = \left\{ 3^{-k}(a \pm 6b, b \pm 2a, 3c)^T \mid a,b,c \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\} \subset X'$
- $Z = \left\{ 3^{-k}(3a, b \pm 2c, c \pm 6b)^T \mid a,b,c \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\} \subset X'$

vérifient $(H \setminus \{1\}) \cdot X' \subset Z$ et $(K \setminus \{1\}) \cdot X' \subset Y$.

De plus $Y \not\subseteq Z$ en effet $h \cdot (1,0,0)^T = \frac{1}{3}(1,2,0)^T \in Y \setminus Z$.

Le lemme du Ping-pong nous permet alors de conclure $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \hookrightarrow SO_3(\mathbb{R})$.

Démonstration du troisième point : Il reste à prouver que la "dédoublabilité" se transmet du groupe (SO_3) à l'ensemble sur lequel il agit ($\mathbb{S}^2$).

En fait ne n'est a priori pas le cas, il faut que l'action soit sans points fixes non-triviaux :

Lemme 2

Si un groupe G est dédoublable par action sur lui-même de translation à gauche, et s'il agit simplement sur un ensemble X **alors** *X est dédoublable sous l'action de G*

L'utilisation de l'axiome du choix se fait ici !

3. En fait pour $g \in G$ on a $X' \underset{\varphi}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{g}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{\psi}{\to} X'$ où φ est la multiplication terme à terme par $(1, \sqrt{3}, 1)$ et ψ par $(1, \sqrt{3}/3, 1)$. On vérifie que l'on a ce qui nous manquait à savoir que l'image du neutre est I_3. Et donc le morphisme de $G \to GL(\mathbb{R}^3)$ se factorise en $G \to GL_{\mathbb{Z}}(X')$.

Démonstration : Pour $x \in X$, on note $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x sous l'action de G. Elles sont toutes non-vides et forment une partition de X.

L'axiome du choix nous donne un ensemble $A \subset X$ ayant exactement un représentant par orbite : $X = \sqcup_{a \in A} \mathcal{O}_a$.

et de plus $G \cdot A = \{ga \mid g \in G,\ a \in A\} = X$ car c'est la réunion de toute les orbites.

Posons G_1, G_2 une partition de G avec $G_1 \simeq G \simeq G_2$. Alors comme l'action est simple $A_1 = G_1 \cdot A$ et $A_2 = G_2 \cdot A$ sont disjoints.

Alors A_1 et A_2 forment une partition de X et sont équidécomposables à X sous l'action de G : en effet pour A_1, posons $G_1 = G_1^1 \sqcup \cdots \sqcup G_1^n$ et $G = G^1 \sqcup \cdots \sqcup G^n$ tels que $G^i \approx G_1^i$.

On peut voir qu'alors pour tout i, $G^i \cdot A \approx G_1^i \cdot A$. Ainsi $A_1 = G_1^1 \cdot A \sqcup \cdots \sqcup G_1^n \cdot A \simeq G^1 \cdot A \sqcup \cdots \sqcup G^n \cdot A = G \cdot A = X$. On fait de même pour A_2, d'où le résultat. ■

Reste enfin à appliquer le résultat à la sphère. Or L_2 n'agit pas librement sur la sphère (toute rotation non-identité possède exactement 2 points fixes).

Considérons $D = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists f \in L_2 \setminus \{1\}$ telle que $fx = x\}$ cet ensemble est dénombrable car il existe une surjection de $(L_2 \setminus \{1\})^2$ vers D (l'application qui a une rotation associe ses deux points fixes).

De plus $S = \mathbb{S}^2 \setminus D$ est stable sous l'action de L_2 : en effet si il existe une rotation f telle que $fx = N$ où N est le point fixe d'une autre rotation g, alors $f^{-1}gf$ fixe x.

L'action de L_2 sur $\mathbb{S}^2$ se restreint en une action simple de L_2 sur S, et le lemme 2 permet de conclure à la réalité du paradoxe de Banach-Tarski.

Remarques :

- Le développement est difficile et calculatoire.
- L'emploi du lemme du Ping-pong ne simplifie pas singulièrement la partie calculatoire de la preuve, et ajoute des difficultés d'ordre algébrique : "quand est-ce qu'on peut restreindre une action de groupe ? "
- Si on veut éviter le lemme du Ping-pong, on peut simplement le démontrer dans le cas présent avec h et k les deux rotations. Attention la preuve dans RMS semble fausse (récurrence mal initialisée) mais donne une idée très correcte de la rédaction.
- Il n'y a pas de références pour l'emploi du lemme du Ping-pong tel que je l'ai rédigé.

Recasements (pour l'option informatique)

- 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 141 - Utilisation des groupes en géométrie.
- (135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.)
- (144 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.)