Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par les polynômes de Bernstein.

Nil

26 avril 2014

Résumé

On démontre que la suite des polynômes de Bersntein associée à une fonction f continue converge uniformément vers f sur [0,1], ce qui démontre le théorème de Weierstrass. Puis, on montre que la vitesse de cette convergence est un $O(\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}))$, où ω désigne le module de continuité uniforme de f. Finalement, on exhibe une fonction continue pour laquelle la vitesse de convergence est exactement en $\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, ce qui démontre l'optimalité de notre résultat sans hypothèses supplémentaires sur f.

Ce qu'on va démontrer. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. On introduit les polynômes de Bernstein associés à f en posant, $\forall \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$*

$$B_{f,n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}),$$

et le module de continuité uniforme associé à f en posant $\forall h > 0$

$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x-y| \leq h\}.$$

1. *La suite $(B_{f,n})_n$ converge uniformément vers f sur [0,1].*
2. *Plus précisemment, il existe $C > 0$ indépendante de f telle que*

$$\|f - B_{f,n}\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

3. *De plus, il existe f_0 continue sur [0,1] et $C' > 0$ tels que*

$$\|f_0 - B_{f_0,n}\|_\infty \geq C'\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Démonstration.

1. • Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, toutes de même paramètre $x \in [0,1]$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, variable aléatoire de loi Binômiale de paramètres n et x. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_{f,n}(x)$$

Dès lors, $|f(x) - B_{f,n}(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leq \mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|$.

• f est continue – donc uniformément continue – sur [0,1] (théorème de Heine). Ansi, pour $\delta > 0$ fixé, lorsque $|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta)$. De plus, on a toujours $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty$. En notant A l'événement $\{|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta\}$, il vient

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta)\mathbb{P}(A) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(A^C).$$

L'inégalité de Tchebytchev permet d'écire :

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})}{\delta^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

On a finalement, en majorant $\mathbb{P}(A)$ par 1 :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},$$

d'où

$$\|f - B_{f,n}\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Comme $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)) = 0$, finalement

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty = 0,$$

ce qui montre la convergence uniforme de $B_{f,n}$ vers f sur [0,1].

2. • On a besoin ici de quelques propriétés du module de continuité uniforme de f, et on commence par admettre le résultat :
Lemme. *ω est une fonction sous-additive :*

$$\forall h_1 h_2, \quad \omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$$

Par suite, pour tout entier naturel n et h réel positif, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$. De plus, il est facile de voir que ω est croissante. Dès lors, pour h_1 et h_2 positifs :

$$\omega(h_1h_2) \leq \omega[(1 + \lfloor h_1 \rfloor)h_2] \leq (1 + \lfloor h_1 \rfloor)\omega(h_2) \leq (1 + h_1)\omega(h_2).$$

• On a toujours, pour $x \in [0,1]$, $|f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|$. Or par définition de ω,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left[\omega\left(|x - \frac{S_n}{n}|\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Or $\left\|f(x) - f(\frac{S_n}{n})\right\|_1 \leq \left\|f(x) - f(\frac{S_n}{n})\right\|_2$, puisqu'on intègre sur un espace de mesure finie. On calcule

$$\begin{aligned}
\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= x^2 - \frac{2x}{n}\mathbb{E}(S_n) + \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{n^2} = x^2 - \frac{2x}{n}(nx) + \frac{\mathbb{E}(S_n)^2 + \mathrm{Var}(S_n)}{n^2} \\
&= -x^2 + \frac{n^2x^2 + nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},
\end{aligned}$$

d'où finalement $|f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2}\cdot\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, majoration indépendante de x d'où

$$\|f(x) - B_{f,n}(x)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\cdot\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

3. On admet le résultat suivant :

Lemme (Inégalité de Khintchine)**.** *Soit* (R_n) *une suite de variables aléatoires indépedantes de Rademacher (c.-à-d. de loi uniforme sur* $\{$*-1,1*$\}$*).* $\forall X \in Vect(R_n), \|X\|_2 \leq \sqrt{2}\|X\|_1$

Soit $f_0 : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. La deuxième inégalité triangulaire donne :

$$\forall x, y, \quad |f_0(x) - f_0(y)| = \left| |x - \frac{1}{2}| - |\frac{1}{2} - y| \right| \leq |x - y|,$$

d'où par définition du module de continuité uniforme : $\forall h, \quad \omega(h) \leq h$.

$$\forall n, \|f_0 - B_{f_0,n}\|_\infty \geq |f_0(\frac{1}{2}) - B_{f_0,n}(\frac{1}{2})| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \left| \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right|.$$

On reconnait par le théorème de transport, en prenant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ somme de n variables indépendantes de Bernoulli, toutes de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{E} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} \mathbb{E} |2S_n - n| = \frac{1}{2n} \|R_1 + \cdots + R_n\|_1.$$

Où les variables aléatoires $(R_n) = (2X_n - 1)$ sont indépendantes et de Rademacher. Or par l'inégalité de Khintchine,

$$\frac{1}{2n} \|R_1 + \cdots + R_n\|_1 \geq \frac{1}{2\sqrt{2n}} \|R_1 + \cdots + R_n\|_2$$

$\square$

Référence : Zuily-Queffelec, Éléments d'analyse pour l'agrégation.